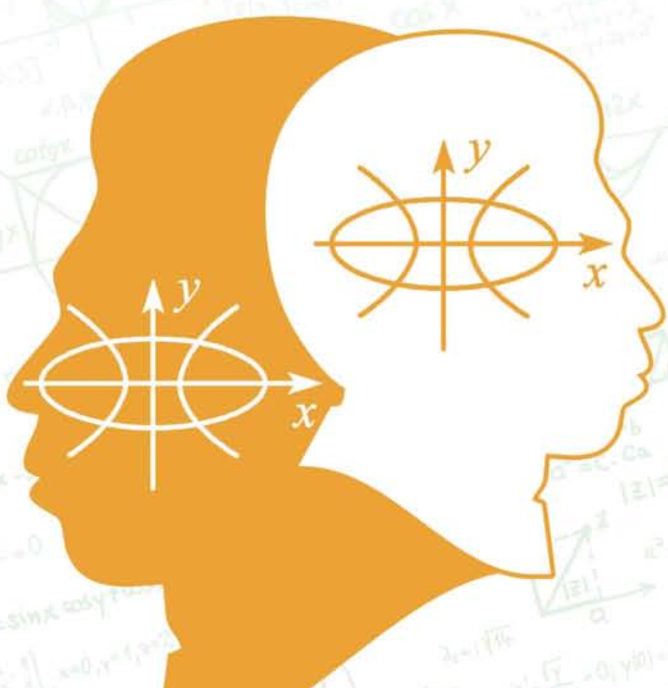
高中数学例题变式训练

GAOZHONG SHUXUE LITI BIANSHI XUNLIAN

《高中数学例题变式训练》
编写组 编

A 版
（必修第二册）



齊魯書社

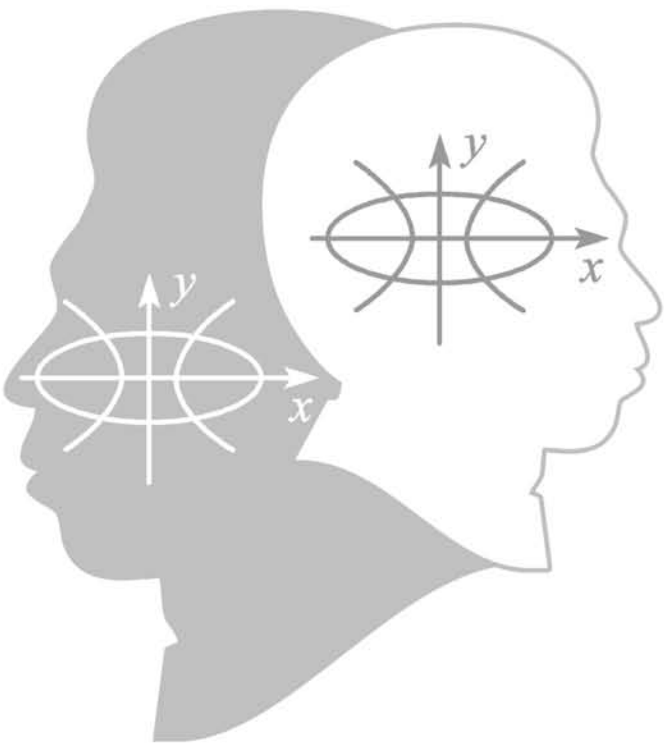
高中数学例题变式训练

GAOZHONG SHUXUE LITI BIANSHI XUNLIAN

A 版

（必修第二册）

《高中数学例题变式训练》
编写组 编



齊魯書社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学例题变式训练 ：A 版. 必修. 第二册 /《高中数学例题变式训练》编写组编. -- 济南：齐鲁书社，2019.12

ISBN 978-7-5333-3995-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①中学数学课—高中—习题集 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 281037 号

高中数学例题变式训练 A 版(必修第二册)

《高中数学例题变式训练》编写组 编

主管单位	山东出版传媒股份有限公司
出　　版	齊魯書社
社　　址	济南市英雄山路 189 号
邮　　编	250002
网　　址	www.qlss.com.cn
电子邮箱	qilupress@126.com
发　　行	山东新华书店集团有限公司
印　　刷	山东滨州新华印刷有限公司
开　　本	850mm×1168mm　1/16
印　　张	10
字　　数	240 千字
版　　次	2019 年 12 月第 1 版
印　　次	2019 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5333-3995-1
定　　价	23.00 元

目 录

第六章 平面向量及其应用

第七章 复数

第八章 立体几何初步

第九章　统计

第十章　概率

第六章　平面向量及其应用

第1课时　平面向量的概念

题型一　向量的几何表示

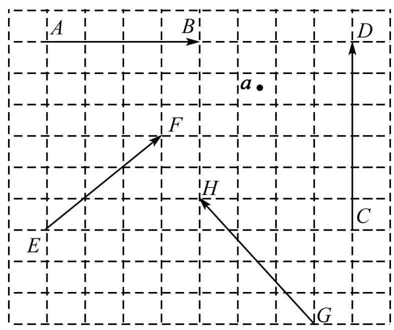
课本例1

变式1(等级一)　假设下图每个格子的边长为1 cm，比例尺为1∶100，请求出下列各向量的模.

$|\overrightarrow{AB}|=$______，$|\overrightarrow{CD}|=$______，

$|\overrightarrow{EF}|=$______，$|\overrightarrow{GH}|=$______，

$|\boldsymbol{a}|=$______.



变式2(等级二)　一辆汽车从A点出发向西行驶了100 km到达B点，然后又改变方向向西偏北50°行驶了200 km到达C点，最后又改变方向向东行驶了100 km到达D点.

(1)作出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

(2)求$|\overrightarrow{AD}|$.

题型二　相等向量与共线向量

例　判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1)若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$一定不与$\boldsymbol{b}$共线；

(2)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则$A$，$B$，$C$，$D$四点是平行四边形的四个顶点；

(3)在平行四边形$ABCD$中，一定有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；

(4)若向量$\boldsymbol{a}$与任意向量$\boldsymbol{b}$平行，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(5)若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；

(6)若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.

变式1(等级一)　给出下列各命题：

(1)零向量没有方向；

(2)若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(3)单位向量都相等；

(4)向量就是有向线段；

(5)向量的模一定是正数.

其中不正确命题的序号是________________.

变式2(等级一)　下列命题正确的是　(　　)

A. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$也共线

B. 任意两个相等非零向量的起点与终点是一个平行四边形的四个顶点

C. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是非零向量

D. 有相同起点的两个非零向量不平行

课本例 2

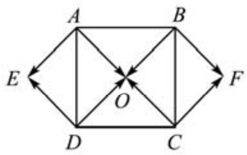
变式 1（等级一）　O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，四边形 $OAED$，$OCFB$ 都是正方形，在如图所示的向量中：

(1)分别找出与$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$相等的向量；

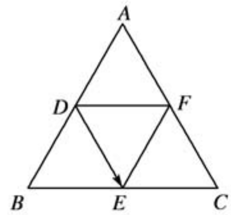
(2)找出与$\overrightarrow{AO}$共线的向量；

(3)找出与$\overrightarrow{AO}$模相等的向量；

(4)向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$是否相等？



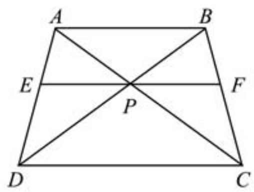
变式 2（等级一）　如图所示，D，E，F 依次是等边三角形 ABC 的边 AB，BC，AC 的中点. 在以 A，B，C，D，E，F 为起点或终点的向量中，找出与向量$\overrightarrow{DE}$相等的向量.



变式 3（等级一）　如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 P，点 E,F 分别在两腰 AD,BC 上，EF 过点 P 且 $EF\parallel AB$，则下列等式正确的是　（　　）

A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$　　B. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PF}$　　D. $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PF}$



变式 4（等级一）　已知圆心为点 O 的圆上有 A，B，C 三点，则向量$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}$是　（　　）

A. 有相同起点的相等向量

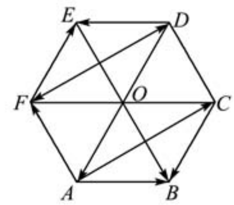
B. 长度为 1 的向量

C. 模相等的向量

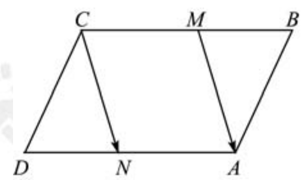
D. 相等的向量

变式 5（等级一）　如图，点 O 是正六边形$ABCDEF$的中心，图中所标向量与$\overrightarrow{CA}$共线的有　（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



变式 6（等级二）　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$N$，$M$ 是边 AD，BC 上的点，且 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$. 求证：$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

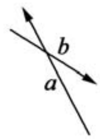


第 2 课时　向量的加法运算

题型一　利用三角形法则或平行四边形法则作图

课本例 1

变式 1(等级一)　如图,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,分别用三角形法则和平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



变式 2(等级一)　已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$.试作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,并求出它的模.

题型二　向量的加法在实际中的应用

课本例 2

变式 1(等级一)　一架执行任务的飞机从 A 地按北偏西 30°的方向飞行 300 km 后到达 B 地,然后向 C 地飞行.已知 C 地在 A 地东偏北 30°的方向上,且 A,C 两地相距 300 km.求飞机从 B 地到 C 地飞行的方向及 B,C 间的距离.

变式 2(等级一)　若 $\boldsymbol{a}$ 表示"向东走 8 km",$\boldsymbol{b}$ 表示"向北走 8 km",则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是________.

变式 3(等级一)　设 $\boldsymbol{a}$ 表示"向东走了 2 km",$\boldsymbol{b}$ 表示"向南走了 2 km",$\boldsymbol{c}$ 表示"向西走了 2 km",$\boldsymbol{d}$ 表示"向北走了 2 km",则

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 表示向______走了______km;

(2)$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 表示向______走了______km;

(3)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$_____ km,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是______.

变式 4(等级一)　在水流速度为 $4\sqrt{3}$ km/h 的河中,如果要使船以 12 km/h 的实际航速与河岸垂直行驶,求船航行速度的大小和方向.

题型三　利用向量加法的运算法则和运算律化简

例1　化简:

(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$.

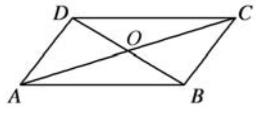
变式 1(等级一)　如图,在▱$ABCD$ 中,O 是 AC 和 BD 的交点.

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$________;

(2)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=$________;

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=$________;

(4)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$________.



变式 2(等级一)　化简:

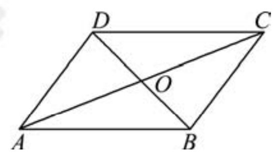
(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

(2)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$;

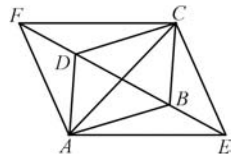
(3)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

题型四　利用向量的加法解决几何问题

例2　如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$. 求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



变式 1（等级一）　如图，BD 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线，在 BD 的延长线和反向延长线上取点 F，E，使 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



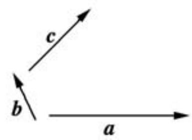
变式 2（等级二）　已知 D，E，F 分别是△ABC 三边 BC，AC，AB 的中点. 求证：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

第3课时　向量的减法运算

题型一　利用三角形法则作差向量

课本例3

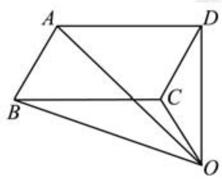
变式(等级一)　如图,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.



题型二　用已知向量表示其他向量

课本例4

变式(等级二)　如图,已知 O 为▱$ABCD$ 外一点,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.请用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{OD}$.



题型三　利用三角形法则或平行四边形法则化简

例1　化简:$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

变式(等级一)　化简:

(1)$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$;

(2)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}$;

(3)$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BM}$.

题型四　向量减法几何意义的应用

例2　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量.

(1)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直？

(2)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$？

(3)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平分 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所夹的角？

变式 1(等级一)　已知$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且$\angle A=90°$. 下列命题：

(1)$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$；

(2)$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|$；

(3)$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|$；

(4)$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|^2$.

其中正确命题的序号为____________.

变式 2(等级二)　若 $|\overrightarrow{OA}|=8$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，则 $|\overrightarrow{AB}|$的取值范围是　　(　　)

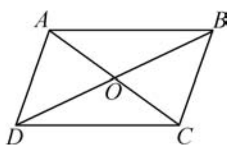
A. $[3,8]$　　B. $(3,8)$

C. $[3,13]$　　D. $(3,13)$

题型五　利用向量的加、减运算判定几何形状

例3　在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{DB}$，并求当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别满足什么条件时，四边形 $ABCD$ 为矩形、菱形、正方形.

变式 1(等级一)　如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O. 若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，则四边形 $ABCD$ 的形状是________.



变式 2(等级二)　若 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点，且满足$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

第 4 课时　向量的数乘运算

题型一　向量的数乘运算

课本例 5

变式 1（等级一）　方程 $5(x+\boldsymbol{a})+3(x-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$ 的根 $x=$________.

变式 2（等级一）　已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，则 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________.

题型二　用已知向量表示其他向量

课本例 6

变式 1（等级一）　（2018・全国）在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$　　（　　）

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

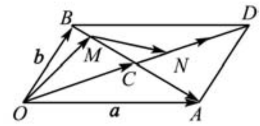
B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

变式 2（等级二）　如图，四边形 $OADB$ 是以向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形，又 $BM=\frac{1}{3}BC$，$CN=\frac{1}{3}CD$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示：

(1)$\overrightarrow{OC}$；(2)$\overrightarrow{OM}$；(3)$\overrightarrow{ON}$；(4)$\overrightarrow{MN}$.



题型三　向量共线定理的应用

课本例 7、例 8

变式 1(等级一)　两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,求证:$A$,$B$,$D$ 三点共线;

(2)若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线,求实数 k 的值.

变式 2(等级一)　已知两向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线.若向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 共线,求实数 t 的值.

变式 3(等级二)　已知平面内 A,B,C 三点共线,O 为平面内任意一点.求证:存在实数 α,β,且 $\alpha+\beta=1$,使 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$.

第 5 课时 向量的数量积(1)

题型一 数量积公式的简单应用

课本例 9

变式 1(等级一) 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=6$,求$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足下列条件时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的值.

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(3)$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角是$60°$.

变式 2(等级一) (2018·全国)已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

变式 3(等级二) 已知向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,$|\overrightarrow{OA}|=3$,则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$________.

题型二 利用数量积解决夹角问题

课本例 10

变式 1(等级一) 已知非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{a}|$,且$\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

变式 2(等级一) 已知$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,且$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$垂直,求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

题型三　数量积的性质

例　已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，下列选项中错误的是　（　　）

A. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$　　B. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

C. $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

变式（等级一）　若向量 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 $60°$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

课本例 11

变式 1（等级一）　对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，下列关系式中不恒成立的是　（　　）

A. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

B. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$

D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

变式 2（等级一）　已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$. 求：

(1) $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$.

第 6 课时 向量的数量积(2)

题型一 数量积运算律的应用

课本例 12

变式 1(等级一) 已知$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=7$,且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$.求$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

变式 2(等级一) 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$,且$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=2$.求:

(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$;

(2)$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

变式 3(等级一) 若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-72$,则向量$\boldsymbol{a}$的模为 ( )

A. 2 B. 4 C. 6 D. 12

题型二 利用数量积解决共线与垂直问题

课本例 13

变式 1(等级一) 已知$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个非零向量,当$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}(t\in\mathbf{R})$的模取得最小值时,

(1)求t的值(用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$表示);

(2)求证:$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$互相垂直.

变式 2(等级二) 设平面内两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$互相垂直,且$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=1$,又k与t是两个不同时为零的实数.若$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$垂直,$k$关于$t$的函数关系式为$k=f(t)$,则函数$k=f(t)$的最小值为 ( )

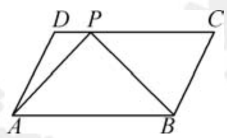
A. $-\frac{9}{16}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{9}{8}$ D. $-\frac{9}{8}$

第 7 课时　向量的数量积习题课

题型一　平面向量数量积的基本运算

例1　已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=120°$，点 E，F 分别在边 BC，DC 上，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{DF}$. 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，则 λ 的值为________.

变式 1（等级一）　如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是________.

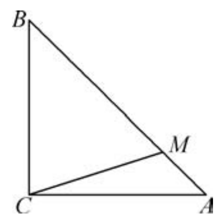


变式 2（等级一）　已知平面上三点 A，B，C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=5$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于（　　）

A. -25　　B. -20　　C. -15　　D. -10

变式 3（等级二）　如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$ 且 $AC=BC=4$，点 M 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MA}$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CB}$ 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6



题型二　利用平面向量数量积求两向量夹角

例2　(1)若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

(2)若平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值等于(　　)

A. $\frac{1}{26}$　　B. $-\frac{1}{26}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $-\frac{1}{12}$

变式1(等级一)　已知 A,B,C 为圆 O 上的三点. 若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为________.

变式2(等级二)　设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cos\theta-\boldsymbol{b}\sin\theta$. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则向量 $f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 与 $f(\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1)$ 的夹角为________.

变式3(等级二)　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ 中有 2 个是 $\boldsymbol{a}$，2 个是 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3,\boldsymbol{y}_4$ 中也有 2 个是 $\boldsymbol{a}$，2 个是 $\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{x}_4\cdot\boldsymbol{y}_4$ 所有可能取值中的最小值为 $4|\boldsymbol{a}|^2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　)

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. 0

题型三　利用数量积求向量的模

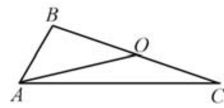
例3　(1)已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 等于　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

(2)已知直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ADC=90°$，$AD=2$，$BC=1$，P 是腰 DC 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为________.

变式 1(等级一)　已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$. 若平面向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_2=1$，则 $|\boldsymbol{b}|=$________.

变式 2(等级一)　如图，在 $\triangle ABC$ 中，O 为 BC 的中点. 若 $AB=1$，$AC=3$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$，则 $|\overrightarrow{OA}|=$________.



变式 3(等级二)　记 $\max\{x,y\}=\begin{cases}x, x\geqslant y,\\ y, x<y,\end{cases}$ $\min\{x,y\}=\begin{cases}y, x\geqslant y,\\ x, x<y.\end{cases}$ 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为平面向量，则　(　　)

A. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\leqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

B. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\geqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

C. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

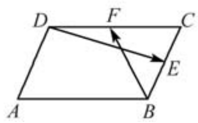
D. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\geqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

第8课时　平面向量基本定理

题型一　用基底表示向量

课本例1

变式1(等级一)　如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.如果 E,F 分别是 BC,DC 的中点,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DE}$.

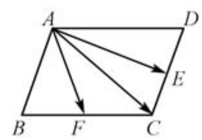


变式2(等级一)　已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量,$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{c}=7\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

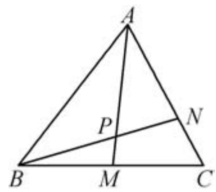
题型二　平面向量基本定理的应用

课本例2

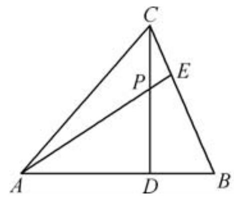
变式1(等级一)　在平行四边形 $ABCD$ 中,E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点.若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$,其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则 $\lambda+\mu=$______.



变式 2(等级二)　如图,在$\triangle ABC$中,M是BC的中点,点N在边AC上,且$AN=2NC$,AM与BN相交于点P.求$AP:PM$的值.



变式 3(等级二)　如图,已知$\triangle ABC$的面积为$14\ cm^2$,D,E分别是AB,BC上的点,且$AD:DB=BE:EC=2:1$,连接AE和CD相交于点P.求$\triangle APC$的面积.

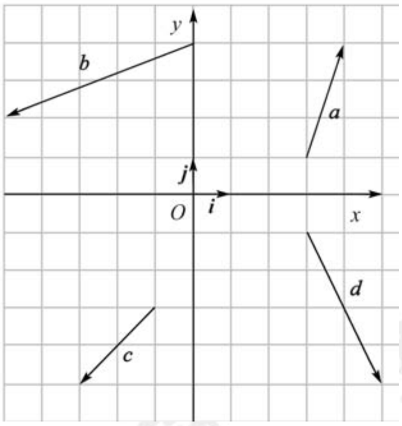


第9课时　平面向量加、减运算的坐标表示

题型一　用坐标表示向量

课本例3

变式(等级一)　如图,分别用基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$表示向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$,并求出它们的坐标.



题型二　向量加、减的坐标运算

课本例4

变式(等级一)　已知$\boldsymbol{a}=(-2,3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2)$,求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的坐标.

题型三　向量坐标表示的应用

课本例5

变式1(等级一)　在平面直角坐标系中,四边形$ABCD$的边$AB\,/\!/\,DC$,$AD\,/\!/\,BC$.已知点$A(-2,0)$,$B(6,8)$,$C(8,6)$,则点D的坐标为____________.

变式2(等级二)　已知点$A(1,0)$,$B(0,2)$,$C(-1,-2)$,求以A,B,C为顶点的平行四边形的第四个顶点D的坐标.

第 10 课时　平面向量数乘运算的坐标表示

题型一　向量数乘运算的坐标表示

课本例 6

变式 1(等级一)　若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标分别是 $(-1,2),(3,-5)$,求 $3\boldsymbol{a},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的坐标.

变式 2(等级一)　已知 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-4,3),\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,4)$,求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标.

变式 3(等级一)　边长为单位长度的正方形 $ABCD$,若 A 点与坐标原点重合,边 AB,AD 分别落在 x 轴、y 轴的正方向上,则向量 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$的坐标为________.

变式 4(等级二)　已知 $\boldsymbol{a}=(-2,3),\boldsymbol{b}=(3,1),\boldsymbol{c}=(10,-4)$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

题型二 向量共线的充要条件

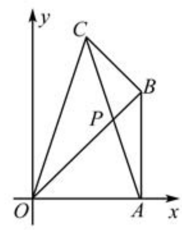
课本例 7

变式 1(等级一) (2018·全国)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$.若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则 $\lambda=$________.

变式 2(等级二) 求与向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$共线的单位向量.

变式 3(等级二) 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$.当实数 k 为何值时,向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 平行?此时,它们是同向还是反向?

变式 4(等级二) 如图,已知点 $A(4,0)$,$B(4,4)$,$C(2,6)$,求 AC 和 OB 的交点 P 的坐标.



题型三　利用向量共线的充要条件判断三点共线

课本例8

变式1(等级一)　已知 $A(0,-1)$,$B(2,3)$,$C(3,5)$.求证:A,B,C 三点共线.

变式2(等级一)　向量$\overrightarrow{PA}=(k,12)$,$\overrightarrow{PB}=(4,5)$,$\overrightarrow{PC}=(10,k)$.当 k 为何值时,A,B,C 三点共线?

题型四　求等分点的坐标

课本例9

变式1(等级一)　在$\triangle ABC$中,已知 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,求其重心 G 的坐标.

变式2(等级二)　已知点 $A(3,-4)$与点 $B(-1,2)$,点 P 在直线 AB 上,且$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PB}|$,求点 P 的坐标.

第 11 课时　平面向量数量积的坐标表示

题型一　与向量平行、垂直有关的问题

课本例 10

变式 1(等级一)　已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(2x+3,-x)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 x 的值；

(2)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

变式 2(等级一)　已知向量 $\overrightarrow{OA}=(3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，向量 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$. 试求 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ 时，$\overrightarrow{OD}$ 的坐标.

题型二　平面向量数量积的坐标运算

课本例 11

变式 1(等级一)　已知 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

变式 2(等级一)　在平面直角坐标系 xOy 中，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,1)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

题型三　平面向量的夹角问题

课本例 12

变式 1（等级一）　已知向量$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则$\angle ABC=$　　（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

变式 2（等级二）　已知 $\boldsymbol{a}=(m,2m)$，$\boldsymbol{b}=(3m,2)$，要使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则 m 的取值范围为　　（　　）

A. $m<-\frac{4}{3}$或 $m>0$ 且 $m\neq\frac{1}{3}$

B. $m<-\frac{4}{3}$或 $m>0$

C. $m<-\frac{4}{3}$且 $m\neq-\frac{1}{3}$

D. $m>0$ 且 $m\neq\frac{1}{3}$

第12课时　平面几何中的向量方法

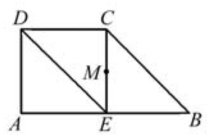
题型一　利用向量证明平行与垂直

课本例1

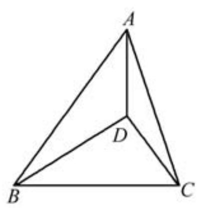
变式1(等级一)　如图,已知直角梯形 $ABCD$,$AD\perp AB$,$AB=2AD=2CD$,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,M 为 CE 的中点.用向量方法证明:

(1)$DE/\!/BC$;

(2)D,M,B 三点共线.



变式2(等级二)　如图,若点 D 在△ABC 内,且 $AB^2-AC^2=DB^2-DC^2$.求证:$AD\perp BC$.



题型二　向量法判定平面图形形状

课本例2

变式1(等级一)　在△ABC 中,若$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$,则△$ABC$ 的形状为________.

变式2(等级一)　在△ABC 中,设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$.若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$,试确定△$ABC$ 的形状.

变式3(等级二)　若四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 满足 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}=\mathbf{0}$,$(\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_1A_4})\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=0$,则该四边形一定是　　(　　)

A. 矩形　　B. 菱形

C. 正方形　　D. 直角梯形

第 13 课时　向量在物理中的应用举例

题型一　向量在物理中的应用

课本例 3

变式 1（等级一）　已知一个物体在大小为 6 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小为 100 m，且 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 $60°$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=$________ J.

变式 2（等级二）　一个质点受到平面上的三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$（单位：N）的作用而处于平衡状态.已知 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 成 $60°$角，且 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的大小分别为 2 和 4，则 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小为　　(　　)

A. 6　　B. 2　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{7}$

题型二　渡河问题

课本例 4

变式 1（等级一）　一架飞机以 300 km/h 的速度斜向上飞行，方向与水平面成 $30°$角，则该飞机在水平方向的分速度大小是________ km/h.

变式 2（等级一）　河水的流速为 2 m/s，一艘小船以 10 m/s 的实际速度沿垂直于对岸的方向行驶，则小船在静水中的速度大小为________.

第 14 课时　余弦定理

题型一　已知两边及其夹角解三角形

课本例 5

变式 1(等级一)　在$\triangle ABC$中,$a=1$,$b=2$,$C=60^\circ$,求 c.

变式 2(等级二)　$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$a=\sqrt{5}$,$c=2$,$\cos A=\dfrac{2}{3}$,则$b=$　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

课本例 6

变式 1(等级一)　在$\triangle ABC$中,$a=2\sqrt{3}$,$B=45^\circ$,$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,解此三角形.

变式 2(等级二)　(2018·全国)在$\triangle ABC$中,$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$BC=1$,$AC=5$,则$AB=$　(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

题型二　已知三边解三角形

例1　在$\triangle ABC$中,$a=2$,$b=\sqrt{2}$,$c=\sqrt{3}+1$,解三角形.

变式(等级一)　(1)在$\triangle ABC$中,$a:b:c=3:5:7$,求其最大内角.

(2)在边长为5,7,8的三角形中,求其最大角与最小角之和.

题型三　利用余弦定理判断三角形的形状

例2　已知$\triangle ABC$的三边长分别为2,3,4,判断三角形的形状.

变式(等级二)　如果将直角三角形三边增加同样的长度,则新三角形的形状　(　　)

A. 是锐角三角形　　B. 是直角三角形

C. 是钝角三角形　　D. 由增加长度决定

第15课时 正弦定理

题型一 已知两角及一边解三角形

课本例7

变式1(等级一) 在$\triangle ABC$中,已知$c=2,A=45^\circ,C=30^\circ$,求$a,b$及$B$.

变式2(等级一) 在$\triangle ABC$中,$AC=\sqrt{3},A=45^\circ,C=75^\circ$,则$BC=$________.

题型二 已知两边及其一边的对角解三角形

课本例8

变式1(等级一) 在$\triangle ABC$中,$a=15,b=10,A=60^\circ$,则$\cos B=$ ( )

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

变式2(等级一) 在$\triangle ABC$中,$b=\sqrt{3},B=60^\circ,c=1$,求$a$和$A,C$.

变式3(等级二) 在$\triangle ABC$中,已知$A=30^\circ$,且$a=4,b=4\sqrt{3}$,解此三角形.

题型三　正弦定理的推论

例　已知 $2R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 的直径.求证：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

变式 1(等级一)　(1)在 $\triangle ABC$ 中，若 $A:B:C=3:4:5$，则 $a:b:c$ 等于　(　　)

A. $3:4:5$

B. $2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$

C. $1:\sqrt{3}:2$

D. $2\sqrt{2}:2\sqrt{3}:(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(2)在 $\triangle ABC$ 中，若 $c=10$，$C=30^\circ$，则该三角形外接圆的半径 $R=$________.

变式 2(等级二)　(1)在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=2a\sin B$，则 A 等于　(　　)

A. 30°或 60°　　B. 45°或 60°

C. 120°或 60°　　D. 30°或 150°

(2)在 $\triangle ABC$ 中，若 $a\cos A=b\sin B$，则 $\sin A\cdot\cos A+\cos^2 B=$　(　　)

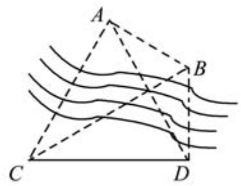
A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

第16课时 余弦定理、正弦定理应用举例

题型一 测量距离

课本例9

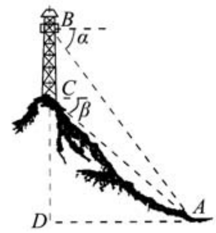
变式(等级一) 如图,A,B两点都在河的对岸(不可到达).若$CD=1\ 000$ m,$\angle ACB=30^\circ$,$\angle BCD=30^\circ$,$\angle BDA=30^\circ$,$\angle ADC=60^\circ$,求A,B两点之间的距离.



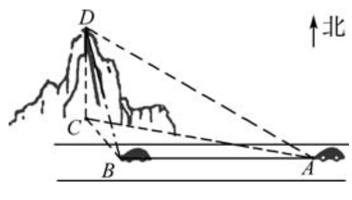
题型二 测量高度

课本例10

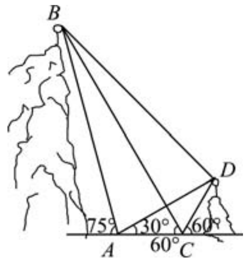
变式1(等级一) 在山顶铁塔上的B处测得A处的俯角$\alpha=54^\circ40'$,在塔底C处测得A处的俯角$\beta=50^\circ1'$.已知铁塔BC部分的高为27.3 m,求山高CD(结果精确到1 m).



变式2(等级一) 如图,一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶,到A处时测得公路北侧一山顶D在西偏北30°的方向上,行驶600 m后到达B处,测得此山顶在西偏北75°的方向上,仰角为30°,则此山的高度$CD=$________ m.



变式 3(等级一)　如图,A,B,C,D 都在同一个与水平面垂直的平面内,B,D 为两岛上两座灯塔的塔顶.船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 $75°$,$30°$,于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 $60°$,$AC=0.1$ km.试探究图中 B,D 间的距离与另外哪两点间的距离相等,然后求 B,D 间的距离.



题型三　测量角度

课本例 11

变式 1(等级一)　一艘缉私艇发现在其北偏东 $45°$方向相距 12 n mile 的海面上有一艘走私船正以 10 n mile/h 的速度沿东偏南 $15°$方向逃窜.已知该缉私艇的速度为 14 n mile/h,若要在最短的时间内追上该走私船,缉私艇应沿北偏东 $45°+\alpha$ 的方向去追.求追击所需的时间和 α 角的正弦值.

变式 2(等级一)　某渔轮在航行中不幸遇险,发出呼救信号,我海军舰艇在 A 处获悉后,测出该渔轮在其方位角为 $45°$相距10 n mile的 C 处,并测得渔轮正沿方位角为 $105°$的方向,以 9 n mile/h 的速度向一座小岛靠拢.我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救.求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间(方位角:指从正北方向顺时针旋转到目标方向线的角.角度精确到 $0.1°$,时间精确到 1 min).

第17课时 解三角形的综合运用复习课

题型一 解三角形与三角函数相结合

例1 已知在$\triangle ABC$中，A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$\left(b-\frac{c}{2}\right)\sin B+\left(c-\frac{b}{2}\right)\sin C-a\sin A=0$.

(1)求角A的大小；

(2)若$a=\sqrt{3}$，求$b+c$的取值范围.

变式(等级二) 已知向量$\boldsymbol{a}=(\sin 2x,\cos 2x)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期；

(2)在$\triangle ABC$中，$f(A)=\frac{1}{2}$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，求$\triangle ABC$的面积S.

题型二 解三角形与平面向量相结合

例2 已知点$P(\sqrt{3},1)$，$Q(\cos x,\sin x)$，O为坐标原点，函数$f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期；

(2)若A为$\triangle ABC$的内角，$f(A)=4$，$BC=3$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

变式(等级二) $\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 向量$\boldsymbol{m}=(a,\sqrt{3}b)$与$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$平行.

(1)求A；

(2)若$a=\sqrt{7}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积.

题型三　解三角形与平面几何相结合

例3　(2018·全国)在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

(1)求 $\cos\angle ADB$；

(2)若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

变式(等级二)　在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分$\angle BAC$，$BD=2DC$.

(1)求$\dfrac{\sin B}{\sin C}$；

(2)若$\angle BAC=60°$，求$\angle B$.

章末检测

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

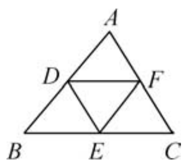
1. 如图，D,E,F 分别是△ABC 的边 AB,BC,CA 的中点，则（　　）

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$

B. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$

D. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$



2. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos 40°,\sin 40°)$，$\boldsymbol{b}=(\sin 20°,\cos 20°)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于（　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则△$ABC$ 是（　　）

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 任意三角形

4. 定义平面向量之间的一种运算“$\odot$”如下：对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$，$\boldsymbol{b}=(p,q)$，令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$. 下面说法错误的是（　　）

A. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$

B. $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

C. 对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，有 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$

D. $(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

5. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,5)$，$\boldsymbol{c}=(3,x)$ 满足条件 $(8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=30$，则 x 等于（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. 9　　C. 13　　D. $4\sqrt{2}$

7. 平面上 O,A,B 三点不共线，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则△$OAB$ 的面积等于（　　）

A. $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

B. $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

8. O 是平面上的一个定点，A,B,C 是该平面上不共线的三个点，一个动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in(0,+\infty)$. 直线 AP 一定通过△ABC 的（　　）

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,\sqrt{1+\cos\theta})$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{1-\cos\theta})$，其中 $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则一定有（　　）

A. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°　　D. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

10. 在△ABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 所对的边，若 $a=2b\cos C$，则此三角形一定是（　　）

A. 等腰直角三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰或直角三角形

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\cos x)$，向量 $\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值是（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 9

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3)$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{c}=$（　　）

A. $\left(\frac{7}{9},\frac{7}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{7}{3},-\frac{7}{9}\right)$

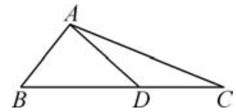
C. $\left(\frac{7}{3},\frac{7}{9}\right)$　　D. $\left(-\frac{7}{9},-\frac{7}{3}\right)$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

14. 甲船在 A 处观察乙船，乙船在它北偏东 60° 的方向上，两船相距 a 海里，乙船正向北行驶. 若甲船的速度是乙船的 $\sqrt{3}$ 倍，则甲船应沿__________方向才能追上乙船，追上时甲船行驶了________海里.

15. 如图，在△ABC 中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\ \overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.



16. 在△ABC 中，角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，那么 $c=$________.

三、解答题(共 70 分)

17. (10 分)在平面直角坐标系 xOy 中,点 A,B,C 的坐标分别为 $A(-1,-2)$,$B(2,3)$,$C(-2,-1)$.

(1)求以线段 AB,AC 为邻边的平行四边形的两条对角线的长;

(2)设实数 t 满足 $(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$,求 t 的值.

18. (12 分)已知 A,B,C 的坐标分别为 $A(4,0)$,$B(0,4)$,$C(3\cos\alpha,3\sin\alpha)$.

(1)若 $\alpha\in(-\pi,0)$,且 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$,求角 α 的大小;

(2)若 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,求 $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}$ 的值.

19. (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边,且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1)求 A 的大小;

(2)若 $\sin B+\sin C=1$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

20. (12 分)已知向量 $\overrightarrow{OP}=\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right),-1\right)$,$\overrightarrow{OQ}=\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right),\cos 2x\right)$,定义函数 $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的表达式,并指出其最大值和最小值;

(2)在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $f(A)=1$,$bc=8$,求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

21. (12 分)一条河的两岸平行,河的宽度为 $\sqrt{3}$ km,一艘船从河岸边的 A 地出发,向河对岸航行.已知船的速度大小为 4 km/h,水流速度大小为 2 km/h.这艘船怎样航行航程最短?当航程最短时,这艘船行驶完全程需要多长时间?

22. (12 分)设 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角,$\boldsymbol{m}=(\sin B+\sin C,0)$,$\boldsymbol{n}=(0,\sin A)$且 $|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{n}|^2=\sin B\sin C$.求:

(1)角 A 的大小;

(2)$\sin B+\sin C$ 的取值范围.

第七章　复数

第1课时　数系的扩充和复数的概念

题型一　复数的概念及分类

课本例1

变式1(等级一)　求当 m 为何值时,复数 $z=(m^2-3m)+(m^2-m-6)\mathrm{i}$ 是下列数:

(1)实数;

(2)虚数;

(3)纯虚数.

变式2(等级一)　求当实数 x 分别取什么值时,复数 $z=\frac{x^2-x-6}{x+3}+(x^2-2x-15)\mathrm{i}$ 是下列数:

(1)实数;

(2)虚数;

(3)纯虚数.

题型二　复数相等

例　已知关于 x 的方程 $(x^2+x+3m)-(2x+1)\mathrm{i}=0$ 有实数根,则实数 m 的值为________,方程的实根 x_0 为________.

变式1(等级二)　若将本例中的方程改为 $x^2+mx+2x\mathrm{i}=-1-m\mathrm{i}$,如何求解?

变式2(等级二)　若将本例中的方程改为 $3x^2-\frac{m}{2}x-1=(10-x-2x^2)\mathrm{i}$,如何求解?

第2课时　复数的几何意义

题型一　复数与点的对应关系

课本例2

变式(等级一)　求当实数 a 分别取何值时,复数 $z=\frac{a^2-a-6}{a+3}+(a^2-2a-15)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 对应的点 Z 满足下列条件:

(1)在复平面的第二象限内;

(2)在复平面内实轴的上方.

题型二　复数的模

例　已知复数 $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$,$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,求 $|z_1|$ 及 $|z_2|$ 并比较它们的大小.

变式(等级一)　设复数 $z_1=a+2\mathrm{i}$,$z_2=-2+\mathrm{i}$,且 $|z_1|<|z_2|$,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

B. $(-1,1)$

C. $(1,+\infty)$

D. $(0,+\infty)$

第3课时　复数的加、减运算及其几何意义

题型一　复数代数形式的加、减运算

课本例1

变式(等级一)　(1)计算:$(2-3i)+(-4+2i)=$________.

(2)已知 $z_1=(3x-4y)+(y-2x)i$, $z_2=(-2x+y)+(x-3y)i$, x,y 为实数.若 $z_1-z_2=5-3i$,则 $|z_1+z_2|=$________.

题型二　复数加、减运算的几何意义

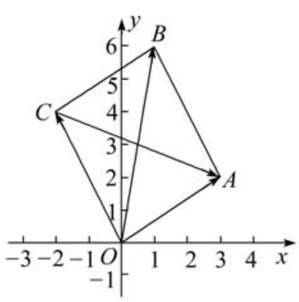
课本例2

变式(等级一)　如图,平行四边形 $OABC$ 的顶点 O,A,C 分别表示 $0,3+2i,-2+4i$.求:

(1) $\overrightarrow{AO}$表示的复数;

(2)对角线$\overrightarrow{CA}$表示的复数;

(3)对角线$\overrightarrow{OB}$表示的复数.



题型三　复数模的最值问题

例　已知 $|z|=1$ 且 $z\in\mathbf{C}$,求 $|z-2-2i|$ 的最小值.

变式1(等级一)　若复数 z 满足 $|z-2|=1$,则复数 z 模的最大值为________,最小值为________.

变式2(等级二)　设 $z\in\mathbf{C}$,且 $|z+1|-|z-i|=0$,则 $|z+i|$ 的最小值为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

第 4 课时　复数的乘、除运算

题型一　复数代数形式的乘法运算

课本例 3、例 4

变式 1(等级二)　复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$，其中 i 为虚数单位，则 z 的实部是________.

变式 2(等级二)　已知 i 是虚数单位，若复数 $(1+a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数，则实数 a 等于　(　　)

A. 2　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{1}{2}$　D. -2

题型二　复数代数形式的除法运算

课本例 5

变式 1(等级一)　若复数 z 满足 $z(2-\mathrm{i})=11+7\mathrm{i}$(i 是虚数单位)，则 z 为　(　　)

A. $3+5\mathrm{i}$　B. $3-5\mathrm{i}$

C. $-3+5i$　D. $-3-5\mathrm{i}$

变式 2(等级一)　已知 i 是虚数单位，复数 $\frac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 为纯虚数，则实数 a 为　(　　)

A. 2　B. -2

C. $-\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

题型三　在复数范围内解方程

课本例 6

变式 1(等级一)　在复数范围内解下列方程：

(1)$x^2+x+2=0$；

(2)$x^3=1$.

变式 2(等级二)　若方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根为 $2-\mathrm{i}$，求实数 b,c 的值.

章末检测

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 若 i 为虚数单位，则复数 $z=5i(3-4i)$ 在复平面内对应的点所在的象限为（　　）

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. "复数 z 是实数"的充分不必要条件为（　　）

A. $|z|=z$　B. $z=\bar{z}$　C. z^2 是实数　D. $z+\bar{z}$ 是实数

3. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位. 若 $a+i=2-bi$，则 $(a+bi)^2$ 等于（　　）

A. $3-4i$　B. $3+4i$　C. $4-3i$　D. $4+3i$

4. 若复数 z 满足 $\frac{\bar{z}}{1-i}=i$，其中 i 是虚数单位，则 z 等于（　　）

A. $-1-i$　B. $1+i$　C. $1-i$　D. $-1+i$

5. 下列各式的运算结果为纯虚数的是（　　）

A. $(1+i)^2$　B. $i^2(1-i)$　C. $i(1+i)^2$　D. $i(1+i)$

6. 在复平面内，O 是原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数分别为 $-2+i$，$3+2i$，$1+5i$，i 为虚数单位，那么 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为（　　）

A. $4+7i$　B. $1+3i$　C. $4-4i$　D. $-1+6i$

7. 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，i 为虚数单位，则 $\bar{z}+|z|$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　B. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　C. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　D. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

8. 已知 i 是虚数单位，若 $z(i+1)=i$，则 $|z|$ 等于（　　）

A. 1　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

9. 已知复数 z 满足 $(1-i)z=i^{2016}$（其中 i 为虚数单位），则 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}i$　D. $-\frac{1}{2}i$

10. 已知关于复数 $z=\frac{2}{1+i}$ 的四个命题：

①$|z|=2$；②$z^2=2i$；③z 的共轭复数为 $1+i$；④z 在复平面内对应的点位于第四象限. 其中真命题为（　　）

A. ②③　B. ①④　C. ②④　D. ③④

11. 已知复数 $z_1=2+i$，z_2 在复平面内对应的点在直线 $x=1$ 上，且满足 $\bar{z}_1\cdot z_2$ 是实数，则 z_2 等于（　　）

A. $1-\frac{1}{2}i$　B. $1+\frac{1}{2}i$　C. $\frac{1}{2}+i$　D. $\frac{1}{2}-i$

12. 如果复数 z 满足 $|z+2i|+|z-2i|=4$，那么 $|z+i+1|$ 的最小值是（　　）

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. $\sqrt{5}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知 i 是虚数单位，若 $\frac{a+3i}{i}=b+i(a,b\in\mathbf{R})$，则 ab 的值为________.

14. 已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$，i 为虚数单位，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot\bar{z}=$________.

15. 已知 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $\log_2(m^2-3m-3)+i\log_2(m-2)$ 为纯虚数，复数 $z=m+ni$ 的对应点在直线 $x+y-2=0$ 上，则 $|z|=$________.

16. 下列说法中正确的是________.（填序号）

①若 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，其中 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\complement_{\mathbf{C}}\mathbf{R}$，则必有 $\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y);\end{cases}$

②$2+i>1+i$；

③虚轴上的点表示的数都是纯虚数；

④若一个数是实数，则其虚部不存在；

⑤若 $z=\frac{1}{i}$，则 z^3+1 对应的点在复平面内的第一象限.

三、解答题（共 70 分）

17.（10 分）设复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)i$，求当 m 为何值时，z 是下列数：

(1)实数；(2)纯虚数.

18. (12 分)已知复数 $z=\frac{(1-i)^2+3(1+i)}{2-i}$.

(1)求 z 的共轭复数 $\bar{z}$;

(2)若 $az+b=1-i$,求实数 a,b 的值.

19. (12 分)已知复数 z_1 满足 $(1+i)z_1=-1+5i$, $z_2=a-2-i$,其中 i 为虚数单位,$a\in\mathbf{R}$. 若 $|z_1-\bar{z}_2|<|z_1|$,求 a 的取值范围.

20. (12 分)已知 $z_1=m^2+\frac{1}{m+1}i$, $z_2=(2m-3)+\frac{1}{2}i$, $m\in\mathbf{R}$,i 为虚数单位,且 z_1+z_2 是纯虚数.求:

(1)实数 m 的值;

(2)$z_1\cdot\bar{z}_2$ 的值.

21. (12 分)已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+i)=1-i$(i 为虚数单位),复数 z_2 的虚部为 2,且 $z_1\cdot z_2$ 是实数,求 z_2.

22. (12 分)已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$, z^2 的虚部是 2.

(1)求复数 z;

(2)设 $z,z^2,z-z^2$ 在复平面上的对应点分别为 A,B,C,求$\triangle ABC$ 的面积.

第八章　立体几何初步

第1课时　基本立体图形(1)

题型一　对棱柱、棱锥、棱台结构特征的认识

例1　关于棱柱、棱锥、棱台的结构特征,下列说法正确的是________.

(1)有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的多面体叫做棱柱;

(2)有一个面是多边形,其余各面都是三角形的多面体一定是棱锥;

(3)用一个面去截棱锥,底面与截面之间的部分多面体是棱台;

(4)如果棱柱有一个侧面是矩形,则其余侧面都是矩形;

(5)棱柱的两个底面是全等的多边形;

(6)四面体的任何一个面都可作为棱锥的底面;

(7)两个底面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体是棱台;

(8)各侧面都是正方形的四棱柱一定是正方体.

变式(等级一)　根据下列描述,说出空间几何体的名称.

(1)由6个平行四边形围成的几何体;

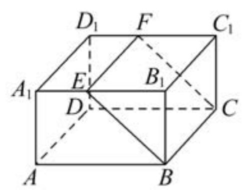
(2)由7个面围成的几何体,其中一个面是六边形,其余6个面都是有一个公共顶点的三角形;

(3)由5个面围成的几何体,其中上、下两个底面是相似三角形,其余3个面都是梯形,并且这些梯形的腰延长后能相交于一点.

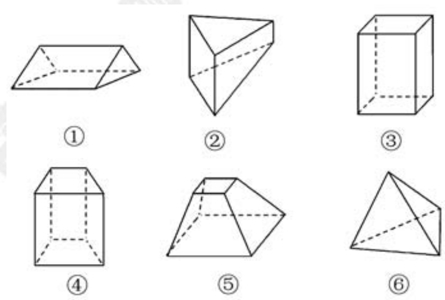
例2　如图,已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

(1)这个长方体是棱柱吗?如果是,是几棱柱?为什么?

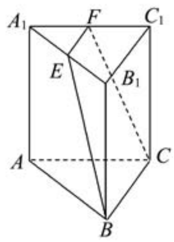
(2)用平面 $BCFE$ 把这个长方体截成两部分后,各部分的几何体还是棱柱吗?若是棱柱,指出它们的底面与侧棱.



变式1(等级一)　如图,下列几何体中,________是棱柱,________是棱锥,________是棱台.(填序号)



变式 2(等级一) 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,E,F 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点,试判断几何体 $ABC-A_1EF$ 是什么几何体,并指出它的底面与侧面.



变式 3(等级一) 给出下列几个结论:

①长方体一定是正四棱柱;

②棱锥的侧面为三角形,且所有侧面都有一个公共顶点;

③平行六面体一定是直棱柱;

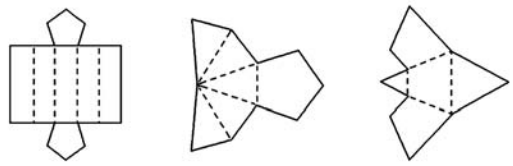
④棱台的侧棱所在直线均相交于同一点.

其中,错误的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

题型二 空间几何体的表面展开与折叠

例3 如图是三个几何体的平面展开图.


(1) (2) (3)

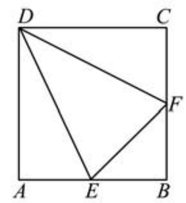
原几何体应为:

(1)________________;

(2)________________;

(3)________________.

变式 1(等级一) 如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,现沿 DE,DF,EF 把$\triangle ADE$,$\triangle CDF$,$\triangle BEF$ 折起,使 A,B,C 三点重合,则折成的几何体为________.

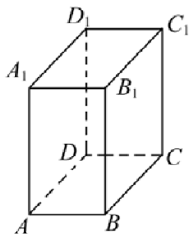


变式 2(等级二) 给出两张正三角形纸片,如图所示.要求将其中一张剪拼成一个底面为正三角形的三棱锥模型,另一张剪拼成一个底面是正三角形的三棱柱模型,请分别设计一种剪拼方法,用虚线标示在图中,并作简要说明.


图1 图2

题型三　空间几何体表面展开图的应用

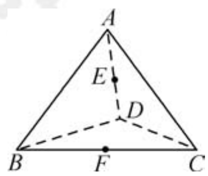
例4　如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=3$,$BC=4$,$BB_1=5$.现有一只小虫从点 A 出发沿长方体表面爬行到点 C_1 来获取食物,求其路程的最小值.



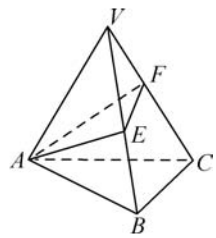
变式 1(等级一)　如图,某城市中心广场主体建筑的形状是一个三棱锥,且所有棱长均为 10 m,其中 E,F 分别为 AD,BC 的中点.

(1)画出该几何体的表面展开图,并注明字母;

(2)为迎接国庆,城管部门拟对该建筑实施亮化工程,现准备从底边 BC 的中点 F 处分别过 AC,AB 上的某点向 AD 中点 E 处架设 LED 灯管,所用灯管长度最短为多少?



变式 2(等级一)　如图,在三棱锥 $V-ABC$ 中,$VA=VB=VC=4$,$\angle AVB=\angle AVC=\angle BVC=30°$.过点 A 作截面$\triangle AEF$,求$\triangle AEF$ 周长的最小值.



第 2 课时 基本立体图形(2)

题型一 对圆柱、圆锥、圆台、球结构特征的认识

例1 下列说法正确的是________.

(1)经过圆柱任意两条母线的截面是一个矩形；

(2)连接圆柱上、下底面圆周上两点的线段是圆柱的母线；

(3)圆柱的任意两条母线相互平行；

(4)用一个平面去截圆锥，则截面与底面之间的几何体是圆台；

(5)以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体.

变式(等级一) 下列说法不正确的是 ( )

A. 圆柱的侧面展开图是一个矩形

B. 圆锥过轴的截面是一个等腰三角形

C. 直角三角形绕它的一条边旋转一周围成的几何体是圆锥

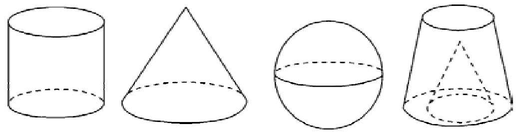
D. 圆台平行于底面的截面是圆

题型二 简单组合体的结构特征

例2 描述下列几何体的结构特征.

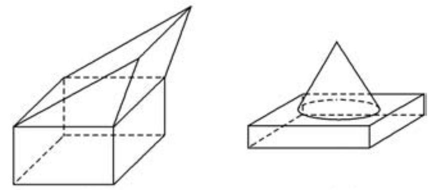
(1) (2) (3)

变式 1(等级一) 下列几何体是组合体的是 ( )



A. B. C. D.

变式 2(等级一) 指出下图所示的图形是由哪些简单几何体构成的.

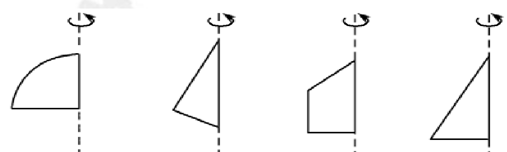


(1) (2)

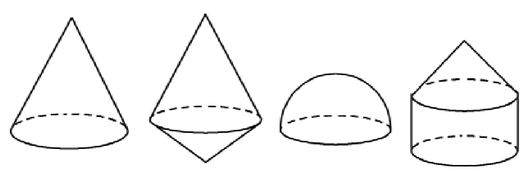
题型三 旋转体的结构特征

课本例 2

变式 1(等级一) 如图，第一排中的图形绕虚线旋转一周，能形成第二排中的某个几何体，请把一、二排中相应的图形用线连起来.



(1) (2) (3) (4)



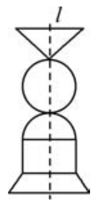
A. B. C. D.

变式 2(等级一)　正方形绕其一条对角线所在直线旋转一周,所得的几何体是　(　　)

A. 圆柱　　B. 圆锥

C. 圆台　　D. 两个共底的圆锥

变式 3(等级一)　如图是由等腰梯形、矩形、半圆、圆、倒三角形对接形成的平面轴对称图形,将它绕轴 l 旋转 180°后形成一个组合体.



下面说法不正确的是　(　　)

A. 该组合体可以分割成圆台、圆柱、圆锥和两个球体

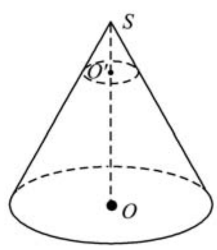
B. 该组合体仍然关于轴 l 对称

C. 该组合体的圆锥和球只有一个公共点

D. 该组合体中的球和半球只有一个公共点

题型四　旋转体的计算问题

例3　如图,用一个平行于圆锥 SO 底面的平面截这个圆锥,截得的圆台上、下底面的面积之比为 1∶16,截去的圆锥的母线长是3 cm,求圆台 $O'O$ 的母线长.



变式(等级一)　在例 3 中,若圆台上底面的半径为1 cm,其他条件不变,试求圆台的高.

第3课时　立体图形的直观图

题型一　画平面图形的直观图

课本例1

变式(等级一)　用斜二测画法画水平放置的菱形的直观图.

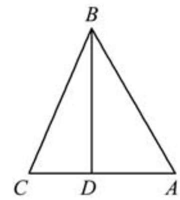
题型二　画空间几何体的直观图

课本例2、例3

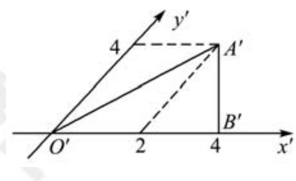
变式(等级一)　用斜二测画法画正五棱锥的直观图.

题型三　计算直观图的面积

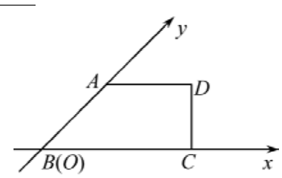
例　如图,在$\triangle ABC$中,$AC=10$ cm,AC边上的高$BD=10$ cm,求其水平放置的直观图的面积.



变式1(等级一)　如图是$\triangle AOB$用斜二测画法画出的直观图,则$\triangle AOB$的面积是________.



变式2(等级二)　如图,一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形$ABCD$.若$\angle ABC=45°$,$AB=AD=1$,$DC\perp BC$,则原平面图形的面积为________.



第 4 课时　棱柱、棱锥、棱台的表面积与体积

题型一　棱柱、棱锥、棱台的表面积

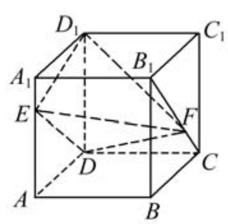
课本例 1

变式（等级二）　已知正四棱台（上、下底面是正方形，上底面的中心在下底面的投影是下底面的中心）上底面的边长为 6，高和下底面的边长都是 12，求它的侧面积.

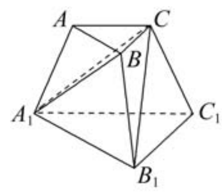
题型二　棱柱、棱锥、棱台的体积

课本例 2

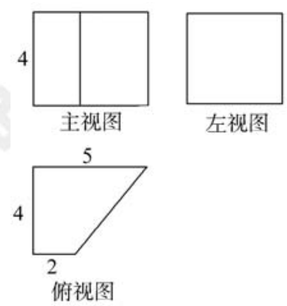
变式 1（等级一）　如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E，F 分别为线段 AA_1，B_1C 上的点，则三棱锥 D_1-EDF 的体积为________.



变式 2（等级二）　如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB:A_1B_1=1:2$. 求三棱锥 A_1-ABC，三棱锥 $B-A_1B_1C$，三棱锥 $C-A_1B_1C_1$ 的体积之比.



变式 3（等级二）　某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积等于________.



第5课时 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积与体积

题型一 圆柱、圆锥、圆台的表面积

例1 若某圆锥的高等于其底面直径，则它的底面积与侧面积之比为 ( )

A. $1:2$ B. $1:\sqrt{3}$

C. $1:\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}:2$

变式(等级一) 若圆台的母线长扩大到原来的 $2n$ 倍，两底面半径均缩小到原来的 $\frac{1}{n}$，那么它的侧面积变为原来的________倍.

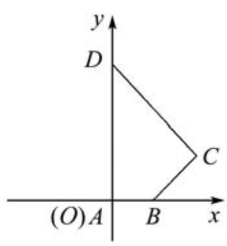
题型二 圆柱、圆锥、圆台的体积

例2 已知某等腰直角三角形直角边的长为 2，将该三角形绕其斜边所在直线旋转一周所围成几何体的体积为 ( )

A. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

C. $2\sqrt{2}\pi$ D. $4\sqrt{2}\pi$

变式1(等级一) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AB=1$，$AD=3$，点 C 到 AB 与 AD 的距离分别为 1 和 2. 将四边形 $ABCD$ 绕 y 轴旋转一周，求所得旋转体的体积.



变式2(等级二) 某圆柱的侧面展开图是两边长分别为 $2a$，a 的矩形，求该圆柱的体积.

题型三 球的表面积和体积

例3 把 3 个半径为 R 的铁球熔成一个底面半径为 R 的圆柱，则该圆柱的高为 ( )

A. R B. $2R$ C. $3R$ D. $4R$

变式(等级一) 两个球的体积之比为 $8:27$，那么这两个球的表面积之比为 ( )

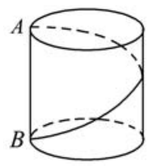
A. $2:3$ B. $4:9$

C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$

第6课时　空间几何体习题课(1)

题型一　圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及其应用

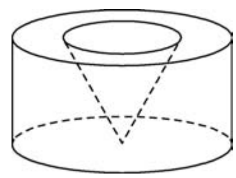
例1　如图，在底面半径为1、高为2的圆柱上的A点处有一只蚂蚁，它要绕圆柱由A点爬到B点．求蚂蚁爬行的最短距离．



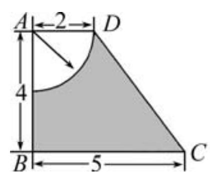
变式(等级一)　某圆台的上、下底面半径分别是10和20，它侧面展开图的扇环的圆心角是180°，那么该圆台的侧面积是________．

题型二　简单组合体的表面积与体积

例2　如图，从底面半径为$2a$、高为$\sqrt{3}a$的圆柱中，挖去一个底面半径为a且与圆柱等高的圆锥，求圆柱的表面积S_1与挖去圆锥后的几何体的表面积S_2的比．



变式(等级一)　根据如图所给图形及数据(单位：cm)，求图中阴影部分绕AB旋转一周所形成几何体的表面积和体积．



题型三　内接、外接问题

例3　在底面半径为 R、高为 h 的圆锥内有一个内接圆柱,求当内接圆柱的侧面积最大时圆柱的高,并求此时的侧面积.

变式 1(等级一)　设长方体的长、宽、高分别为 $2a,a,a$,其顶点都在一个球面上,则该球的表面积为　　(　　)

A. $3\pi a^2$　　B. $6\pi a^2$

C. $12\pi a^2$　　D. $24\pi a^2$

变式 2(等级二)　某圆柱内有一个内接长方体,长方体体对角线的长是 $10\sqrt{2}$ cm,该圆柱的侧面展开图为矩形,此矩形的面积是 100π cm^2. 求圆柱的体积.

第 7 课时　空间几何体习题课(2)

题型一　台体

例1　一个棱台上、下底面的面积之比为 4∶9，若棱台的高是 4 cm，求截得这个棱台的棱锥的高.

变式 1（等级一）　一个三棱台的上、下底面都是正三角形，这两个三角形重心的连线和底面垂直，且其上、下底面边长及高分别为 1，2，2，请计算它的母线长.

变式 2（等级一）　一个圆台的母线长为 12 cm，两底面面积分别为 4π cm^2 和 25π cm^2. 求：

(1)圆台的高；

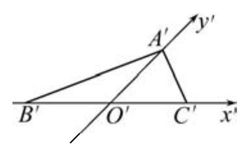
(2)截得此圆台的圆锥的母线长.

题型二　直观图

例2　水平放置的$\triangle ABC$按斜二测画法得到如图所示的直观图，其中 $B'O'=C'O'=1$，$A'O'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，那么原$\triangle ABC$的面积是　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$



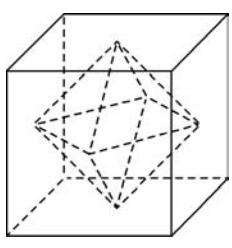
变式(等级一) 已知用斜二测画法画得的正方形直观图面积为 $18\sqrt{2}$,求原正方形的面积.

题型三 几何体的体积和表面积

例3 (1)(2018·全国)已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1,O_2,过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形,则该圆柱的表面积为 ( )

A. $12\sqrt{2}\pi$ B. 12π C. $8\sqrt{2}\pi$ D. 10π

(2)(2018·江苏)如图所示,正方体的棱长为 2,以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为________.



变式 1(等级一) 若圆台上、下底面面积分别是 π,4π,侧面积是 6π,则这个圆台的体积是 ( )

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi$ D. $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$

变式 2(等级一) 将一个钢球放入底面半径为 3 cm 的圆柱形玻璃容器中(完全浸没),水面升高了4 cm(水未溢出),求钢球的半径.

第 8 课时　平面

题型一　三种语言之间的转换

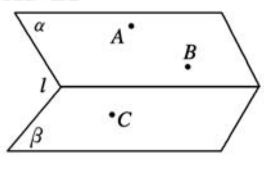
课本例 1

变式 1(等级一)　用符号表示下列语句,并画出相应的图形:

(1)三个平面 α,β,γ 相交于一点 P,且平面 α 与平面 β 交于 PA,平面 α 与平面 γ 交于 PB,平面 β 与平面 γ 交于 PC;

(2)平面 ABD 与平面 BCD 交于 BD,平面 ABC 与平面 ADC 交于 AC.

变式 2(等级一)　分别用文字和符号描述下图中点、直线、平面之间的位置关系,并画出平面 ABC 与平面 α 及 β 的交线.



变式 3(等级一)　将符号表示的关系用文字叙述出来,并画出图形.

$\alpha\cap\beta=l,A\in l,AB\subset\alpha,AC\subset\beta$.

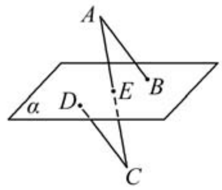
题型二　直线共面问题

例1　求证:两两相交且不共点的三条直线在同一平面内.

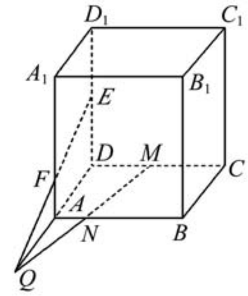
变式(等级一)　已知直线 $a/\!/b$,直线 l 与 a,b 都相交.求证:过 a,b,l 有且只有一个平面.

题型三 三点共线问题

例2 如图，$AB /\!/ CD$，$AB \cap \alpha = B$，$CD \cap \alpha = D$，$AC \cap \alpha = E$. 求证：B，E，D 三点共线.

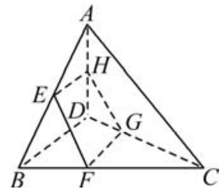


变式（等级一） 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别是棱 CD，AB，DD_1，AA_1 上的点，若 MN 与 EF 的延长线交于点 Q. 求证：D，A，Q 三点共线.



题型四　三线共点问题

例3　如图，已知在空间四边形 $ABCD$ 中，四边形 $EHGF$ 是梯形，且 $EH\parallel FG$. 求证：直线 EF,GH,AC 相交于一点.



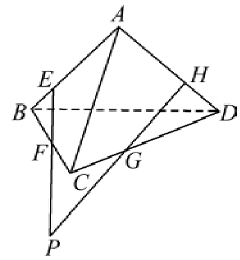
变式(等级一)　在三棱锥 $A-BCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 上分别取 E，F，G，H 四点，如果 $EF\cap HG=P$，则点 P　　(　　)

A. 一定在直线 BD 上

B. 一定在直线 AC 上

C. 在直线 AC 或 BD 上

D. 不在直线 AC 上，也不在直线 BD 上



第9课时　空间点、直线、平面之间的位置关系

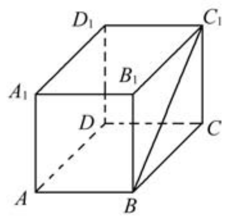
题型一　空间中直线与直线的位置关系

例1　如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，判断：

(1)直线 AA_1 和直线 BC_1 的位置关系；

(2)直线 AD_1 和直线 BC_1 的位置关系；

(3)直线 BD_1 和直线 BC_1 的位置关系.



变式(等级一)　已知 a,b 是异面直线，直线 $c\parallel$ 直线 a，那么 c 与 b　(　　)

A. 一定是异面直线

B. 一定是相交直线

C. 不可能是平行直线

D. 不可能是相交直线

题型二　空间中直线与平面的位置关系

课本例2

变式1(等级一)　下列说法：

①若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $l\parallel\alpha$；

②若直线 a 在平面 α 外，则 $a\parallel\alpha$；

③若直线 $a\parallel b$，直线 $b\subset\alpha$，则 $a\parallel\alpha$；

④若直线 $a\parallel b$，$b\subset\alpha$，那么直线 a 就平行于平面 α 内的无数条直线.

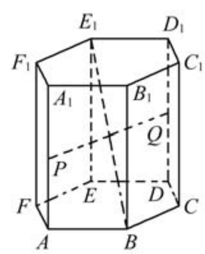
其中正确的个数为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

变式2(等级一)　如图，在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，P,Q 分别是棱 AA_1，DD_1 的中点.

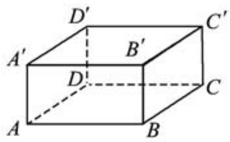
(1)写出六棱柱中所有与直线 PQ 平行的底面与侧面；

(2)判断对角线 BE_1 与此六棱柱所有底面、侧面的位置关系.



题型三　空间中平面与平面的位置关系

例2　如图，围成长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的六个面，两两之间的位置关系有哪几种？



变式 1（等级一）　例 2 中相互平行的面有几对？

变式 2（等级二）　下列命题中，正确的序号是________.

(1)如果两个平面有无数个公共点，则这两个平面重合；

(2)如果一个平面内有无数条直线与另一个平面平行，则这两个平面互相平行；

(3)如果一个平面内的任意一条直线与另一个平面无公共点，则这两个平面一定平行；

(4)如果两个平面有且仅有一条公共直线，则这两个平面相交；

(5)如果一个平面内的任意一点到另一个平面的距离($d>0$)都相等，则这两个平面平行.

变式 3（等级二）　如果在两个平面内分别有一条直线，这两条直线互相平行，那么两个平面的位置关系是________.

题型四　直线、平面位置关系的综合应用

例3　已知直线 $a/\!/b$，$a\cap$ 平面 $\alpha=P$.

(1)画出 a,b,α 的关系图；

(2)求证：直线 b 与平面 α 相交.

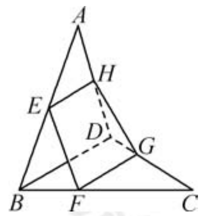
变式（等级一）　已知直线 $a/\!/b$，$a/\!/$平面 α. 判断直线 b 与平面 α 的位置关系，并画出图形.

第 10 课时 直线与直线平行

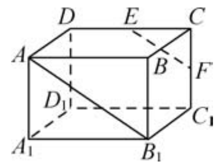
题型一 线线平行的判定

课本例 1

变式 1(等级一) 如图,四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不共面的四边形),E,H 分别是边 AB,AD 的中点,F,G 分别是边 CB,CD 上的点,且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$.求证:四边形 $EFGH$ 是梯形.



变式 2(等级一) 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 CD,CC_1 的中点.求证:$EF/\!/AB_1$.

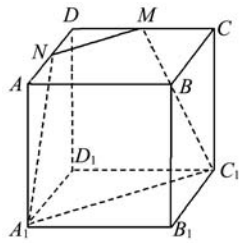


题型二　等角定理的应用

例　已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 CD，AD 的中点. 求证：

(1)四边形 MNA_1C_1 是梯形；

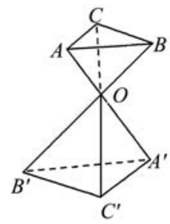
(2)$\angle DNM=\angle D_1A_1C_1$.



变式(等级一)　如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 对应顶点的连线 AA'，BB'，CC' 相交于同一点 O，且 $\frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B'O}=\frac{CO}{C'O}=\frac{2}{3}$.

(1)求证：$AB\parallel A'B'$，$AC\parallel A'C'$，$BC\parallel B'C'$；

(2)求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ 的值.



第 11 课时 直线与平面平行

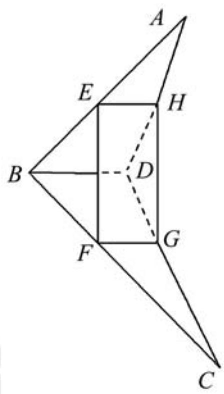
题型一 线面平行的判定

课本例 2

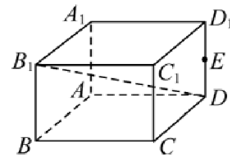
变式 1(等级一) 如图,在空间四边形 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点.求证:

(1)BD∥平面 $EFGH$;

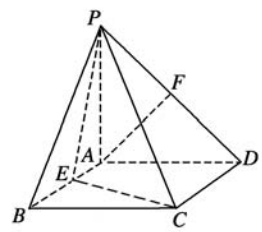
(2)AC∥平面 $EFGH$.



变式 2(等级一) 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为棱 DD_1 上的点.试确定点 E 的位置,使 B_1D∥平面 A_1C_1E.



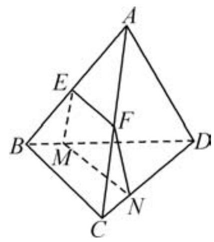
变式 3(等级二) 如图,已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在的平面外一点,E,F 分别为 AB,PD 的中点.求证:AF∥平面 PEC.



题型二　线面平行性质定理的直接应用

课本例 3

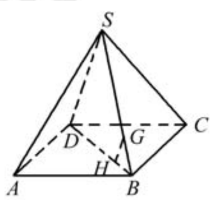
变式 1(等级一)　如图,在四面体 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,AC 的中点,过直线 EF 作平面 α,分别交 BD,CD 于点 M,N. 求证:$EF // MN$.



变式 2(等级一)　如图,已知 S 为四边形 $ABCD$ 外一点,G,H 分别为 SB,BD 上的点. 若 $GH //$ 平面 SCD,则 (　　)

A. $GH // SA$　　B. $GH // SD$

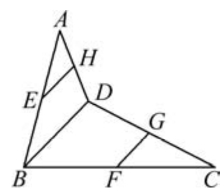
C. $GH // SC$　　D. 以上均有可能



题型三　判定定理和性质定理的综合应用

例　过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 作一个平面交平面 CDD_1C_1 于 EE_1. 求证:$BB_1 // EE_1$.

变式(等级一)　如图,在空间四边形 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 上的点,$EH // FG$. 求证:$EH // BD$.

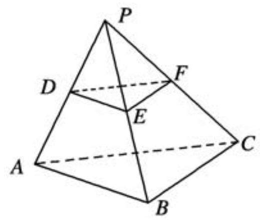


第 12 课时　平面与平面平行

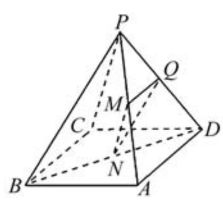
题型一　面面平行的判定

课本例 4

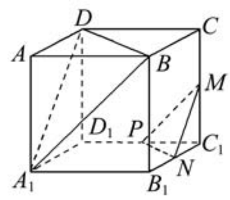
变式 1(等级一)　如图,已知 D,E,F 分别是三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 PA,PB,PC 的中点.求证:平面 DEF // 平面 ABC.



变式 2(等级一)　如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,点 M,N,Q 分别在 PA,BD,PD 上,且 $PM:MA=BN:ND=PQ:QD$.求证:平面 MNQ // 平面 PBC.



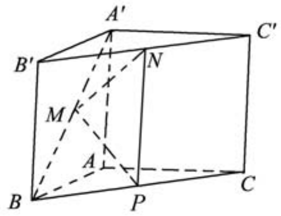
变式 3(等级一)　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M,N,P 分别是 C_1C,B_1C_1,C_1D_1 的中点.求证:平面 MNP // 平面 A_1BD.



变式 4(等级二)　如图,三棱柱ABC-$A'B'C'$,M,N,P分别为$A'B$,$B'C'$,BC的中点.求证:

(1)MN∥平面$A'ACC'$;

(2)平面MNP∥平面$A'ACC'$.



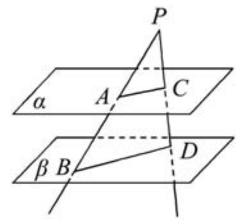
题型二　面面平行性质定理的应用

课本例 5

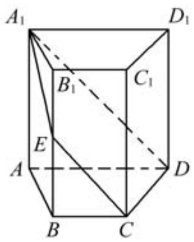
变式 1(等级一)　如图,α∥β,P是平面α,β外的一点(不在α与β之间),直线PB,PD分别与α,β相交于点A,B和C,D.

(1)求证:AC∥BD;

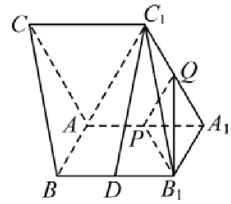
(2)已知$PA=4$ cm,$AB=5$ cm,$PC=3$ cm,求PD的长.



变式 2(等级一)　如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为梯形,$AD/\!/BC$,平面 A_1DCE 与 B_1B 交于点 E.求证:$EC/\!/A_1D$.



变式 3(等级二)　如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,P,Q 分别是棱 AA_1,A_1C_1 的中点,设棱 BB_1 的中点为 D.求证:$C_1D/\!/$平面 PQB_1.



第 13 课时　直线与直线垂直

题型一　求异面直线所成的角

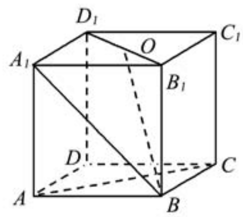
课本例 1

变式 1（等级一）　如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

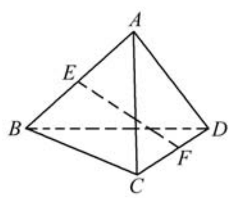
(1)直线 AC 和 DD_1 所成的角的大小是____；

(2)直线 AC 和 D_1C_1 所成的角的大小是____；

(3)直线 AC 和 B_1D_1 所成的角的大小是____.



变式 2（等级二）　如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC=2$，E，F 分别是 AB，CD 的中点. 若 $EF=\sqrt{3}$，求异面直线 AD，BC 所成角的大小.



题型二　证明空间中两条直线垂直

课本例 2

变式（等级一）　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB 的中点为 M，DD_1 的中点为 N. 求证：异面直线 B_1M 与 CN 垂直.

参考答案

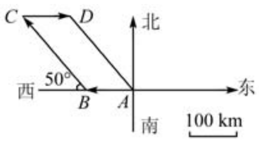
第六章　平面向量及其应用

第 1 课时　平面向量的概念

课本例 1

变式 1　4 m　6 m　$3\sqrt{2}$ m　5 m　0 m

变式 2　(1)向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$如图所示.



(2)由题意,易知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$方向相反,故$\overrightarrow{AB}$∥$\overrightarrow{CD}$.

又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

∴$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$ km.

例　(1)两个向量不相等,可能是长度不同,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共线的可能,故(1)不正确.

(2)$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$A,B,C,D$ 四点可能在同一条直线上,所以(2)不正确.

(3)在平行四边形 $ABCD$ 中,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$平行且方向相同,故$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,(3)正确.

(4)零向量的方向是任意的,与任意向量平行,(4)正确.

(5)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同;$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同,故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同且模相等,故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,(5)正确.

(6)若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,由于 $\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{c}$ 的方向都是任意的,$\boldsymbol{a}$∥$\boldsymbol{c}$ 可能不成立;当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}$∥$\boldsymbol{c}$ 成立,故(6)不正确.

变式 1　(1)(2)(3)(4)(5)　**解析**:(1)该命题不正确,零向量不是没有方向,只是方向不确定.

(2)该命题不正确,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$只是说明这两个向量的模相等,但其方向未必相同.

(3)该命题不正确,单位向量的模都为 1 个单位长度,但方向不一定相同.

(4)该命题不正确,有向线段只是向量的一种表示形式,不能把两者等同起来.

(5)该命题不正确,$|\boldsymbol{0}|=0$.

变式 2　C　**解析**:由于零向量与任意向量都共线,所以 A 不正确;两个相等的非零向量可以在同一条直线上,此时构不成四边形,所以 B 不正确;向量的平行只要方向相同或相反即可,与起点是否相同无关,所以 D 不正确.故选 C.

课本例 2

变式 1　(1)$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AE}$.

(2)与$\overrightarrow{AO}$共线的向量有:$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{DE}$.

(3)与$\overrightarrow{AO}$模相等的向量有:$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{BO}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{CF}$,$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{DE}$.

(4)向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$不相等,因为它们的方向不相同.

变式 2　因为三角形的中位线平行且等于第三边的一半,所以与$\overrightarrow{DE}$相等的向量有$\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{FC}$.

变式 3　D　**解析**:由相等向量的定义,得$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PF}$.

变式 4　C　**解析**:圆的半径 $r=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|$,不一定有 $r=1$,故选 C.

变式 5　C　**解析**:与$\overrightarrow{CA}$共线的向量有$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{FD}$,$\overrightarrow{DF}$,共 3 个,故选 C.

变式 6　∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

∴$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且 AB∥CD.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$且 DA∥CB.

又∵$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{CB}$的方向相同,

∴$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$.

同理可证四边形 $CNAM$ 是平行四边形.

∴$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NA}$.

∵$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DA}|$,$|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{NA}|$,

∴$|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{DN}|$.

又∵DN∥MB,

∴$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

第 2 课时　向量的加法运算

课本例 1

变式 1　三角形法则(图 1):在平面内任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

平行四边形法则(图 2):在平面内任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.以 OA,OB 为邻边作平行四边形,连接对角线 OC,则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

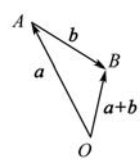


图 1

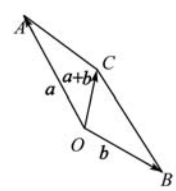
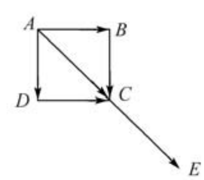


图 2

变式 2　如图所示,由已知得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.又$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,所以延长 AC 至点 E,使$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$,$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$.

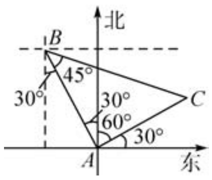


课本例 2

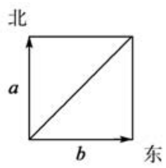
变式 1　如图所示，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，$\angle BAC=90°$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=300$ km，所以 $|\overrightarrow{BC}|=300\sqrt{2}$ km.

因为 $\angle ABC=45°$，且 A 地在 B 地东偏南 $60°$的方向上，可知 C 地在 B 地东偏南 $15°$的方向上.

故飞机从 B 地向 C 地飞行的方向是东偏南 $15°$，B，C 两地间的距离为 $300\sqrt{2}$ km.



变式 2　$8\sqrt{2}$ km　东北方向　**解析：**由题意知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，如图，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是东偏北 $45°$，即东北方向.



变式 3　(1)南　2　(2)西　2　(3)$2\sqrt{2}$　东南方向　**解析：**(1)如图 1 所示，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 表示向南走了 2 km.

(2)如图 2 所示，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 表示向西走了 2 km.

(3)如图 1 所示，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$(km)，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是东偏南 $45°$，即东南方向.

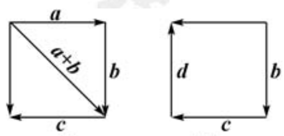
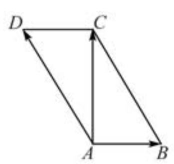


图1　　图2

变式 4　如图所示，$\overrightarrow{AB}$表示水流速度，$\overrightarrow{AC}$表示船航行的实际速度，作 AD 平行且等于 BC，则$\overrightarrow{AD}$即表示船航行的速度.



因为 $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{3}$ km/h，$|\overrightarrow{AC}|=12$ km/h，$\angle CAB=90°$，

所以 $\tan\angle ACB=\dfrac{4\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\angle ACB=30°$，$\angle CAD=30°$.

所以 $|\overrightarrow{AD}|=8\sqrt{3}$ km/h，$\angle BAD=120°$.

因此，船航行速度的大小为 $8\sqrt{3}$ km/h，方向与水流方向所成夹角为 $120°$.

例 1　(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

变式 1　(1)$\overrightarrow{AC}$　(2)$\overrightarrow{AO}$　(3) $\overrightarrow{AD}$　(4)$\mathbf{0}$

变式 2　(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(2)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$

$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN})$

$=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.

例 2　$\because\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$.

又点 A，D，B，C 不在同一直线上，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

变式 1　因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

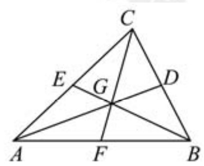
因为 $FD=BE$，且$\overrightarrow{FD}$与$\overrightarrow{BE}$的方向相同，所以$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BE}$.

所以$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$.

所以 AE 与 FC 平行且相等.

所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.

变式 2　如下图所示.



由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$及$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，

得 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.

同理 $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$，$2\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

将上述三式相加，得

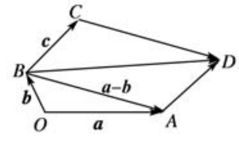
$2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$.

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

第 3 课时　向量的减法运算

课本例 3

变式　如图所示，在平面上任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 再作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.



课本例 4

变式　$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

$\therefore\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

例 1　方法一：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

方法二：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

方法三：设 O 为平面内任意一点，则有

$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$.

变式　(1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\mathbf{0}$.

(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

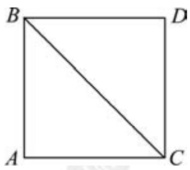
(3) $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$.

例 2　(1)当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

(2)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(3)当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平分 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所夹的角.

变式 1　(1)(2)(3)(4)　**解析**：如下图，以 AB，AC 为邻边作▱$ABDC$，则▱$ABDC$ 是正方形.



根据向量加减法的几何意义可知上述四个命题都正确，即正确命题的序号为(1)(2)(3)(4).

变式 2　C　**解析**：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 同向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|=3$；

当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 反向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|=13$；

当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线时，

由 $|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|<|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|<|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$，可得 $3<|\overrightarrow{AB}|<13$.

综上可得 $3\leqslant|\overrightarrow{AB}|\leqslant13$.

例 3　$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时，平行四边形的两条对角线相等，四边形 $ABCD$ 为矩形；

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，平行四边形的两条邻边相等，四边形 $ABCD$ 为菱形；

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形.

变式 1　平行四边形　**解析**：$\because\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，

$\therefore\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

又 A，B，C，D 四点不共线，

$\therefore|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CD}|$，且 $BA\parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

变式 2　$\because\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，且 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|$，

$\therefore|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

$\therefore$ 以 AB，AC 为邻边的平行四边形的两条对角线长度相等.

$\therefore$ 该平行四边形为矩形. $\therefore AB\perp AC$.

$\therefore\triangle ABC$ 是直角三角形.

第 4 课时　向量的数乘运算

课本例 5

变式 1　$-\frac{5}{8}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$　**解析**：方程可变形为 $5x+5\boldsymbol{a}+3x-3\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，$\therefore 8x=-5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$. $\therefore x=-\frac{5}{8}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$.

变式 2　$8\boldsymbol{e}_2$　**解析**：$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)-(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=3\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=8\boldsymbol{e}_2$.

课本例 6

变式 1　A　**解析**：$\because E$ 是 AD 的中点，$\therefore\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\therefore\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$.

$\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

$\therefore\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

变式 2　(1) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

(3) $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(4) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{5}{6}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

课本例 7、例 8

变式 1　(1) $\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=6\overrightarrow{AB}$，

$\therefore A$，B，D 三点共线.

(2) $\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线，

$\therefore$ 存在实数 λ，使得 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$.

$\therefore(k-2\lambda)\boldsymbol{a}+(1-\lambda k)\boldsymbol{b}=0$.

$\therefore\begin{cases}k-2\lambda=0,\\1-\lambda k=0.\end{cases}$ 解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

变式 2　$\because$ 向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 共线，

$\therefore$ 存在实数 λ，使得 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)$.

$\therefore(2t-\lambda)\boldsymbol{e}_1+(7-\lambda t)\boldsymbol{e}_2=0$.

$\therefore\begin{cases}2t-\lambda=0,\\7-\lambda t=0.\end{cases}$

解得 $t=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

变式 3　$\because A$，B，C 三点共线，

$\therefore$ 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，

使得$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

$\therefore\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$.

$\therefore\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

令 $1-\lambda=\alpha,\lambda=\beta$,则 $\alpha+\beta=1-\lambda+\lambda=1$.

$\therefore\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$,且 $\alpha+\beta=1$.

第 5 课时　向量的数量积(1)

课本例 9

变式 1　(1)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则它们的夹角 $\theta=0°$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0°=3\times6\times1=18$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则它们的夹角 $\theta=180°$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 180°=3\times6\times(-1)=-18$.

(2)当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,它们的夹角 $\theta=90°$. $\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $60°$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=3\times6\times\frac{1}{2}=9$.

变式 2　B　**解析**:$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-(-1)=2+1=3$.

变式 3　9　**解析**:$\because$ 向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,即$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$. $\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=0$,即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2=9$.

课本例 10

变式 1　C　**解析**:$\because\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$,即$2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则有 $2|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

$\therefore\cos\theta=-\frac{2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{2|\boldsymbol{a}|^2}{4|\boldsymbol{a}|^2}=-\frac{1}{2}$.

又$\because\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

变式 2　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

$\because\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,

$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1$.

$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

例　B　**解析**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\cos\theta|$.

当且仅当 $\theta=0$ 或 π 时,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 故 B 错.

变式　$\sqrt{7}$　**解析**:$\because|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 $60°$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60°=1\times2\times\frac{1}{2}=1$.

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+2+4}=\sqrt{7}$.

课本例 11

变式 1　B　**解析**:因为$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,所以 A 选项正确. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,B 选项不成立,所以 B 选项错误. 向量的平方等于向量模的平方,所以 C 选项正确. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$,所以 D 选项正确. 故答案选 B.

变式 2　(1)$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=4-9=-5$.

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2=4+2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+9=7$.

第 6 课时　向量的数量积(2)

课本例 12

变式 1　$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$

$=6\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}^2$

$=6|\boldsymbol{a}|^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=6\times4^2+5\times4\times7\times\cos120°-6\times7^2$

$=-268$.

变式 2　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=4\times2\times\cos120°=-4$,$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=16$,$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=4$.

(1)$\because|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=16+2\times(-4)+4=12$,

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

(2)$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$

$=16-(-4)-2\times4=12$,

$\therefore|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=12$.

变式 3　C　**解析**:由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-6\times4^2=-72$,$\therefore|\boldsymbol{a}|=6$.

课本例 13

变式 1　(1)$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+t^2\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{b}^2\left(t+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\right)^2+\boldsymbol{a}^2-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2}$.

当 $t=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}$时,$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$取最小值.

(2)$\because(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\cdot\boldsymbol{b}^2=0$,

$\therefore\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

变式 2　A　**解析**:$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

$\because\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$,$\therefore\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$,即$[-\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}]\cdot(k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=0$.

$\therefore-k\boldsymbol{a}^2+k(t-3)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t(t-3)\boldsymbol{b}^2=0$.

又$\because|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1$,

$\therefore-4k+t^2-3t=0$.

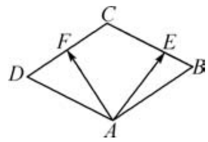
$\therefore k=\frac{1}{4}(t^2-3t)=\frac{1}{4}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{16}$.

所以当 $t=\frac{3}{2}$时,函数取最小值$-\frac{9}{16}$.

第 7 课时　向量的数量积习题课

例 1　2　**解析**:$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}\cdot$

$\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$



$=2\times2\times\cos120^\circ+\frac{1}{\lambda}\times2\times2+\frac{1}{3}\times2\times2+\frac{1}{3\lambda}\times2\times2\times\cos120^\circ=-2+\frac{4}{\lambda}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3\lambda}=\frac{10}{3\lambda}-\frac{2}{3}.$

$\because\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1,$

$\therefore\frac{10}{3\lambda}-\frac{2}{3}=1.\therefore\lambda=2.$

变式 1　22　**解析:** 由 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,得 $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$,所以 $(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})=2$,即 $\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2=2$. 又因为 $\overrightarrow{AD}^2=25$,$\overrightarrow{AB}^2=64$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$.

变式 2　A　**解析:** 如图所示,由已知,可得△ABC 为直角三角形.

$\therefore\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 90°. $\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{CA}|^2=-25.$

变式 3　C　**解析:** 在△ABC 中,因为 $\angle ACB=90^\circ$ 且 $AC=BC=4$,所以 $AB=4\sqrt{2}$,且 $\angle B=\angle A=45^\circ$. 因为 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MA}$,所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. 所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=16+\frac{3}{4}\times4\sqrt{2}\times4\cos135^\circ=4$.

例 2　(1)A　**解析:** 由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$,即 $3\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$.

又 $\because|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{b}|$,设 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\theta$,

则 $3|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta-2|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\therefore\frac{8}{3}|\boldsymbol{b}|^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{b}|^2\cdot\cos\theta-2|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\because0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

(2)B　**解析:** 设 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

$\because(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\times2^2+3^2-4\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=13$,

$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=2^2+4\times3^2+4\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=52$,

$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$=8-18+9=-1$,

$\therefore\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{26}$,

即 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值是 $-\frac{1}{26}$.

变式 1　90°　**解析:** $\because\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore O$ 是△ABC 的边 BC 的中点.

$\therefore BC$ 为直径.

根据圆的几何性质,得 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°.

变式 2　$\frac{\pi}{2}$　**解析:** 由 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得 $\cos\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{\pi}{6}$,$\langle\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\rangle=\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1\cos\frac{\pi}{6}-\boldsymbol{e}_2\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$,

$f(\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_2\cos\frac{5\pi}{6}-(-\boldsymbol{e}_1)\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2$.

$\therefore f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\cdot f(\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$.

$\therefore f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\perp f(\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1)$.

故向量 $f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 与 $f(\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_1)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

变式 3　B　**解析:** 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

由于 $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i(i=1,2,3,4)$ 均由 2 个 $\boldsymbol{a}$ 和 2 个 $\boldsymbol{b}$ 排列而成,设 $S=\sum\limits_{i=1}^{4}(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{y}_i)$,则 S 有以下三种情况:

①$S=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2$;②$S=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;③$S=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$.

$\because|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$,$\therefore$①中 $S=10|\boldsymbol{a}|^2$,②中 $S=8|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta$,③中 $S=5|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta$.

易知②最小,即 $8|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta=4|\boldsymbol{a}|^2$. $\therefore\cos\theta=\frac{1}{2}$. $\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

例 3　(1)A　**解析:** 因为平面向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°,

所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{(2\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{b}^2+2\times|2\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\cos120^\circ}$

$=\sqrt{2^2+2^2+2\times2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$.

(2)5　**解析:** 设 $\overrightarrow{DP}=x\overrightarrow{DC}(0\leqslant x\leqslant1)$,

$\therefore\overrightarrow{PC}=(1-x)\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}-x\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}=(1-x)\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

$\therefore\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}+(3-4x)\overrightarrow{DC}$.

$\therefore|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|^2=\frac{25}{4}\overrightarrow{DA}^2+2\times\frac{5}{2}\times(3-4x)\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+(3-4x)^2\cdot\overrightarrow{DC}^2=25+(3-4x)^2\overrightarrow{DC}^2\geqslant25$.

$\therefore|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 5.

变式 1 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **解析**：因为$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$且$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$，所以$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$的夹角为60°.又因为$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，所以$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$的夹角相等，且为锐角.所以$\boldsymbol{b}$应在$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$夹角的角平分线上.所以$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{e}_1$的夹角为30°，所以$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{e}_1|\cos 30°=1$.

所以$|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

变式 2 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ **解析**：因为$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

又$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以$\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，即$\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{4}\times(1+3+9)=\frac{13}{4}$.所以$|\overrightarrow{OA}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

变式 3 D **解析**：由于$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|$的大小关系与夹角大小有关，故A,B错.当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为锐角时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，此时$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2>|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$；当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为钝角时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，此时$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2>|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$；当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，故选D.

第8课时　平面向量基本定理

课本例 1

变式 1 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

变式 2 ∵$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线，

∴可设$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=(3x-2y)\boldsymbol{e}_1+(-2x+y)\boldsymbol{e}_2=7\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.

又∵$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$不共线，∴$\begin{cases}3x-2y=7,\\-2x+y=-4.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

∴$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

课本例 2

变式 1 $\frac{4}{3}$ **解析**：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，

则$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

又∵$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

∴$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$，即$\lambda=\mu=\frac{2}{3}$.

∴$\lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

变式 2 设$\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$，

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

∵点A,P,M共线，点B,P,N共线，

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2$，

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.

∴$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$.

又∵$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，

∴$\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\3\lambda+\mu=3.\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

∴$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM},\overrightarrow{PM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AM}$，

即$AP:PM=4$.

变式 3 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$为平面$ABC$的一组基底，

则$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b},\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{3}+\boldsymbol{b}$.

∵点A,P,E共线，点D,P,C共线，

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}=\lambda\boldsymbol{a}+\frac{2\lambda}{3}\boldsymbol{b},\overrightarrow{DP}=\mu\overrightarrow{DC}=\frac{\mu}{3}\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}=\left(\lambda-\frac{\mu}{3}\right)\boldsymbol{a}+\left(\frac{2\lambda}{3}-\mu\right)\boldsymbol{b}$.

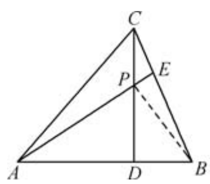
又∵$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，∴$\begin{cases}\lambda-\frac{\mu}{3}=\frac{2}{3},\\\frac{2\lambda}{3}-\mu=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{6}{7},\\\mu=\frac{4}{7}.\end{cases}$

∴$\frac{AP}{AE}=\frac{6}{7},\frac{DP}{DC}=\frac{4}{7}$.

连接BP，则$S_{\triangle ABP}=\frac{4}{7}\times14=8(\mathrm{cm}^2)$，

$S_{\triangle BPC}=\left(1-\frac{6}{7}\right)\times14=2(\mathrm{cm}^2)$.

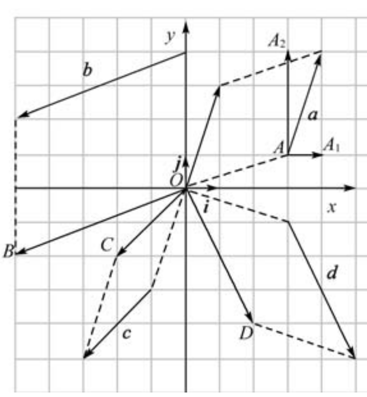
∴$S_{\triangle APC}=14-8-2=4(\mathrm{cm}^2)$.



第9课时　平面向量加、减运算的坐标表示

课本例 3

变式



由图可知，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(1,3)$.

同理 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}=(-5,-2)$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}=(-2,-2)$，$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}=(2,-4)$.

课本例 4

变式 ∵$\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(4,-2)$，

∴$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,3)+(4,-2)=(2,1)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,3)-(4,-2)=(-6,5)$.

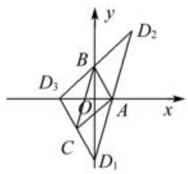
课本例 5

变式 1 $(0,-2)$

变式 2 设点 D 的坐标为(x,y).

①若平行四边形是▱$ABCD$，则由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，得$(0,2)-(1,0)=(-1,-2)-(x,y)$，即$(-1,2)=(-1-x,-2-y)$.

∴$\begin{cases}-1-x=-1,\\-2-y=2.\end{cases}$



解得 $x=0$，$y=-4$.

∴点 D 的坐标为$(0,-4)$(如图中的点 D_1).

②若平行四边形是▱$ADBC$，则由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$，得$(x,y)-(1,0)=(0,2)-(-1,-2)$，即$(x-1,y)=(1,4)$. 解得 $x=2$，$y=4$.

∴点 D 的坐标为$(2,4)$(如图中的点 D_2).

③若平行四边形是▱$ABDC$，则由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，得$(0,2)-(1,0)=(x,y)-(-1,-2)$，即$(-1,2)=(x+1,y+2)$.

解得 $x=-2$，$y=0$.

∴点 D 的坐标为$(-2,0)$(如图中的点 D_3).

综上所述，以 A,B,C 为顶点的平行四边形的第四个顶点 D 的坐标为$(0,-4)$或$(2,4)$或$(-2,0)$.

第 10 课时　平面向量数乘运算的坐标表示

课本例 6

变式 1 $3\boldsymbol{a}=3(-1,2)=(-3,6)$，

$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(-1,2)+3(3,-5)=(-2,4)+(9,-15)$

$=(-2+9,4-15)=(7,-11)$.

变式 2 ∵$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-4,3)$，∴$4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-8,6)$.

又 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,4)$，

∴$(4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=(-8,6)+(2,4)=(-6,10)$.

∴$5\boldsymbol{a}=(-6,10)$，$\boldsymbol{a}=\left(-\frac{6}{5},2\right)$.

∴$\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{a}$

$=(-4,3)-2\left(-\frac{6}{5},2\right)=\left(-\frac{8}{5},-1\right)$.

∴$\boldsymbol{a}=\left(-\frac{6}{5},2\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{8}{5},-1\right)$.

变式 3 $(3,4)$　**解析**：根据题意建立平面直角坐标系，则各顶点的坐标分别为 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$.

∴$\overrightarrow{AB}=(1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1)$.

∴$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=(2,0)+(0,3)+(1,1)=(3,4)$.

变式 4 设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，

则$(10,-4)=x(-2,3)+y(3,1)=(-2x+3y,3x+y)$.

∴$\begin{cases}10=-2x+3y,\\-4=3x+y.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=2.\end{cases}$

∴$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

课本例 7

变式 1 $\frac{1}{2}$　**解析**：由题意可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$.

∵$\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，∴$4\lambda-2=0$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$.

变式 2 方法一：设与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量为 $\boldsymbol{e}=(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$. ①

又 $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{a}$，所以 $3y-4x=0$. ②

解由①②组成的方程组$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\3y-4x=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=-\frac{4}{5},\end{cases}$

即 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

方法二：∵ $\boldsymbol{a}=(3,4)$，∴$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$.

∴与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，或 $\boldsymbol{e}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，

即 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

变式 3 ∵$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，

∴$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$，

$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(1,0)+3(2,1)=(7,3)$.

由两向量平行，得 $3(k-2)-7\times(-1)=0$. ∴$k=-\frac{1}{3}$.

此时 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(-\frac{7}{3},-1\right)=-\frac{1}{3}(7,3)=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.

∴它们是反向的.

变式 4 设$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}=t(4,4)=(4t,4t)$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4t,4t)-(4,0)=(4t-4,4t)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,6)-(4,0)=(-2,6)$.

由$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AC}$共线的充要条件知$(4t-4)\times6-4t\times(-2)=0$. 解得 $t=\frac{3}{4}$.

∴$\overrightarrow{OP}=(4t,4t)=(3,3)$.

∴点 P 的坐标为$(3,3)$.

课本例 8

变式 1 ∵$\overrightarrow{AB}=(2-0,3-(-1))=(2,4)$，

$\overrightarrow{AC}=(3-0,5-(-1))=(3,6)$，

且 $2\times6-4\times3=0$，∴$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$.

∵直线 AB 与直线 AC 有公共点 A，

∴A,B,C 三点共线.

变式 2 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=(k,12)-(4,5)=(k-4,7)$，

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=(k,12)-(10,k)=(k-10,12-k)$.

因为 A,B,C 三点共线，所以$\overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{CA}$，

即$(k-4)(12-k)-(k-10)\times7=0$.

整理，得 $k^2-9k-22=0$. 解得 $k=-2$ 或 $k=11$.

所以当 $k=-2$ 或 11 时，A,B,C 三点共线.

课本例 9

变式 1　设其重心 G 的坐标为(x_G,y_G)，D 为 BC 的中点，则点 D 的坐标为$\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$.

由$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}$，得$\begin{cases}x_G-x_1=2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}-x_G\right),\\ y_G-y_1=2\left(\dfrac{y_2+y_3}{2}-y_G\right).\end{cases}$

$\therefore x_G=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y_G=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

$\therefore$ 重心 G 的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

变式 2　设点 P 的坐标为(x,y).

$\because|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PB}|$，点 P 在直线 AB 上，

$\therefore\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$或$\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$.

当$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$时，$(x-3,y+4)=2(-1-x,2-y)$.

$\therefore\begin{cases}x-3=-2-2x,\\ y+4=4-2y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=0.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为$\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

当$\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$时，$(x-3,y+4)=-2(-1-x,2-y)$.

$\therefore\begin{cases}x-3=2+2x,\\ y+4=-4+2y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-5,\\ y=8.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为$(-5,8)$.

综上，点 P 的坐标为$\left(\dfrac{1}{3},0\right)$或$(-5,8)$.

第 11 课时　平面向量数量积的坐标表示

课本例 10

变式 1　(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(2x+3)+x(-x)=0$，即 $x^2-2x-3=0$.

解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

(2)若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $1\times(-x)-x(2x+3)=0$，即 $x(2x+4)=0$. 解得 $x=0$ 或 $x=-2$.

当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,0)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$；

当 $x=-2$ 时，$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,-4)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$.

变式 2　设点 C 的坐标为(x_0,y_0)，则$\overrightarrow{OC}=(x_0,y_0)$.

$\because\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\therefore\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$-x_0+2y_0=0$.

又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(x_0+1,y_0-2)$，$\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{OA}$，

$\therefore3(y_0-2)-(x_0+1)=0$，即 $x_0-3y_0+7=0$.

$\therefore\begin{cases}-x_0+2y_0=0,\\ x_0-3y_0+7=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_0=14,\\ y_0=7.\end{cases}$

$\therefore\overrightarrow{OC}=(14,7)$.

$\because\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，

$\therefore\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(14,7)-(3,1)=(11,6)$.

$\therefore\overrightarrow{OD}=(11,6)$.

课本例 11

变式 1　由 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$，

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)=4$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

变式 2　D　**解析**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$.

$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+1\times(-1)=5$. 故选 D.

课本例 12

变式 1　A　**解析**：$\because\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore|\overrightarrow{BA}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\cos\angle ABC=\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because0\leqslant\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle\leqslant\pi$，

$\therefore\angle ABC=\langle\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$.

变式 2　A　**解析**：当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，即 $3m^2+4m>0$，解得 $m<-\dfrac{4}{3}$ 或 $m>0$；

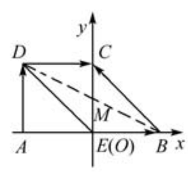
当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时，$2m-6m^2=0$，解得 $m=\dfrac{1}{3}$ 或 $m=0$.

综上，m 的取值范围是 $m<-\dfrac{4}{3}$ 或 $m>0$ 且 $m\neq\dfrac{1}{3}$.

第 12 课时　平面几何中的向量方法

课本例 1

变式 1　以 E 为原点，AB 所在直线为 x 轴，EC 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



令$|\overrightarrow{AD}|=1$，则$|\overrightarrow{DC}|=1$，$|\overrightarrow{AB}|=2$.

$\because CE\perp AB$，$AD=DC$，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为正方形.

$\therefore$ 可求得各点坐标分别为 $E(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，$D(-1,1)$，$A(-1,0)$.

(1)$\because\overrightarrow{ED}=(-1,1)-(0,0)=(-1,1)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,1)-(1,0)=(-1,1)$，

$\therefore\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{DE}$不共线，∴$DE /\!/ BC$.

(2)如图所示，连接MB，MD.

∵M为EC的中点，∴$M\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

∴$\overrightarrow{MD}=(-1,1)-\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{MB}=(1,0)-\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

∴$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$.

又MD与MB有公共点M，∴D，M，B三点共线.

变式 2　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{d}$，

则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}$.

∴$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d})^2=\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^2$.

∵$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{d}^2$，

∴$\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{d}^2$，即$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=0$.

∵$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$，

∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})=0$.

∴$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即$AD\perp BC$.

课本例 2

变式 1　等腰三角形　**解析**：∵$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$，

∴$\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2=0$，即$\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{CB}^2$.

∴$CA=CB$.

∴$\triangle ABC$为等腰三角形.

变式 2　∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，∴$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由向量加法的三角形法则可知，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

∴$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$. ∴$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$.

解得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$. 同理可得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. ∴$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

∴$\triangle ABC$是等边三角形.

变式 3　B　**解析**：由$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}=\boldsymbol{0}$，得

$\overrightarrow{A_1A_2}=-\overrightarrow{A_3A_4}$. ∴$\overrightarrow{A_1A_2}/\!/\overrightarrow{A_3A_4}$，$|\overrightarrow{A_1A_2}|=|\overrightarrow{A_3A_4}|$.

∴四边形$A_1A_2A_3A_4$是平行四边形.

又∵$(\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_1A_4})\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_4A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=0$，

∴$\overrightarrow{A_4A_2}\perp\overrightarrow{A_1A_3}$.

∴四边形$A_1A_2A_3A_4$是菱形.

第 13 课时　向量在物理中的应用举例

课本例 3

变式 1　300　**解析**：$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle=6\times100\times\cos 60^\circ=300(\mathrm{J})$.

变式 2　D　**解析**：由于质点处于平衡状态，所以$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{F}_3=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$.

所以$|\boldsymbol{F}_3|^2=\boldsymbol{F}_3^2=[-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)]^2=\boldsymbol{F}_1^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_2^2=2^2+2\times2\times4\times\frac{1}{2}+4^2=4+8+16=28$.

所以$|\boldsymbol{F}_3|=2\sqrt{7}$.

课本例 4

变式 1　$150\sqrt{3}$　**解析**：在水平方向上的分速度为$300\times\cos 30^\circ=150\sqrt{3}(\mathrm{km/h})$.

变式 2　$2\sqrt{26}$ m/s　**解析**：设河水的流速为$\boldsymbol{v}_1$ m/s，小船在静水中的速度为$\boldsymbol{v}_2$ m/s，船的实际速度为$\boldsymbol{v}$ m/s，则$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，$|\boldsymbol{v}_1|=2$，$|\boldsymbol{v}|=10$.

因为$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}_1$，所以$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1=0$.

所以$|\boldsymbol{v}_2|=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1|=\sqrt{\boldsymbol{v}^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1^2}$

$=\sqrt{100-0+4}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}(\mathrm{m/s})$.

第 14 课时　余弦定理

课本例 5

变式 1　由余弦定理，得

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{1+4-4\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

变式 2　D　**解析**：由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，即$5=b^2+4-2\times b\times2\times\frac{2}{3}$. 解得$b=3$或$b=-\frac{1}{3}$（舍去）. 故选 D.

课本例 6

变式 1　由余弦定理，得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos 45^\circ=8$.

∴$b=2\sqrt{2}$.

∴$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$.

∵$0^\circ<A<180^\circ$，∴$A=60^\circ$.

∴$C=180^\circ-A-B=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$.

变式 2　A　**解析**：∵$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$.

又∵$BC=1$，$AC=5$，

∴$AB=\sqrt{BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos C}$

$=\sqrt{1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)}=4\sqrt{2}$. 故选 A.

例 1　由余弦定理的推论，得

$\cos A=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵$A\in(0,\pi)$，∴$A=\frac{\pi}{4}$.

由余弦定理的推论，得

$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{6}$.

∴$C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$.

变式　(1)由于$a:b:c=3:5:7$，不妨设$a=3k$，$b=5k$，$c=7k(k>0)$. 因此c边最长，其对角C为最大内角. 由余弦定理推论，得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\frac{1}{2}$.

$\therefore C=120°$,即最大内角为 $120°$.

(2)设边长为 5,7,8 的边对角分别为 A,B,C,则 $A<B<C$. 由余弦定理的推论,得 $\cos B=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \cos(A+C)=-\cos B=-\frac{1}{2}$. $\therefore A+C=120°$.

∴最大角与最小角之和为 $120°$.

例 2　设最长边所对的角为 α,则 $\cos\alpha=\frac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}<0$. $\therefore \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\therefore\triangle ABC$ 是钝角三角形.

变式　A　**解析:**设直角$\triangle ABC$三边为 a,b,c,且满足 $a^2+b^2=c^2$,三边增加同样的长度 $m(m>0)$,则 $c+m$ 为最长边,$(a+m)^2+(b+m)^2=a^2+b^2+2(a+b)m+2m^2$,$(c+m)^2=c^2+2mc+m^2$.

$\because a+b>c$,

$\therefore (a+m)^2+(b+m)^2>(c+m)^2$.

由余弦定理的推论,得

$\cos C=\frac{(a+m)^2+(b+m)^2-(c+m)^2}{2(a+m)(b+m)}>0$.

∴最大角 C 为锐角.

第 15 课时　正弦定理

课本例 7

变式 1　$B=180°-A-C=105°$.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\times\sin 45°}{\sin 30°}=2\sqrt{2}$.

又$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{2\times\sin 105°}{\sin 30°}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

$\therefore a=2\sqrt{2}$,$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,$B=105°$.

变式 2　$\sqrt{2}$　**解析:**由题意,得 $B=180°-A-C=60°$.

由正弦定理,得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$,

则 $BC=\frac{AC\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$.

课本例 8

变式 1　D　**解析:**$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,且 $B<A=60°$,$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

变式 2　$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{1\times\sin 60°}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

$\because b>c$,$B=60°$,$\therefore C<B$,C 为锐角.

$\therefore C=30°$,$A=90°$.

$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.

变式 3　由正弦定理,得$\frac{4}{\sin 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}$.

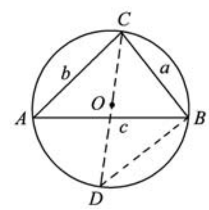
$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because 0°<B<180°$,$\therefore B=60°$或 $B=120°$.

当 $B=60°$时,$C=90°$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=8$;

当 $B=120°$时,$C=30°$,$c=a=4$.

例　过点 C 作圆 O 的直径 CD,则 $CD=2R$.



连接 BD,则$\angle CBD=90°$,且$\angle A=\angle D$.

在 Rt$\triangle DBC$ 中,$CD=\frac{a}{\sin D}=\frac{a}{\sin A}$,即$\frac{a}{\sin A}=2R$.

同理$\frac{b}{\sin B}=2R$,$\frac{c}{\sin C}=2R$.

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

变式 1　(1)B　**解析:**$\because A:B:C=3:4:5$,

$\therefore A=45°$,$B=60°$,$C=75°$.

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$.

(2)10　**解析:**$\frac{10}{\sin 30°}\times\frac{1}{2}=10$.

变式 2　(1)D　**解析:**$\because b=2a\sin B$,

$\therefore \sin B=2\sin A\sin B$.

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$. $\therefore A=30°$或 $150°$.

(2)D　**解析:**$\because a\cos A=b\sin B$,

$\therefore \sin A\cos A=\sin^2 B$,即 $\sin A\cdot\cos A=1-\cos^2 B$.

$\therefore \sin A\cos A+\cos^2 B=1$.

第 16 课时　余弦定理、正弦定理应用举例

课本例 9

变式　由题意,知$\triangle ACD$ 为正三角形,$\angle BDC=90°$.

所以 $AC=CD=1\ 000$ m,

$BC=\frac{CD}{\cos\angle BCD}=\frac{1\ 000}{\cos 30°}=\frac{2\ 000\sqrt{3}}{3}$(m).

在$\triangle ABC$ 中,$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 30°$

$=1\ 000^2+\frac{2\ 000^2}{3}-2\times1\ 000\times\frac{2\ 000\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=1\ 000^2\times\left(1+\frac{4}{3}-2\right)$

$=\frac{1\ 000^2}{3}$.

所以 $AB=\frac{1\,000\sqrt{3}}{3}$ m，

即 A，B 两点之间的距离为$\frac{1\,000\sqrt{3}}{3}$ m.

课本例 10

变式 1　由题意，知$\angle BCA=90°+\beta$，$\angle ABC=90°-\alpha$，$\angle BAC=\alpha-\beta$，$\angle BAD=\alpha$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AB}{\sin(90°+\beta)}$.

所以，$AB=\frac{BC\sin(90°+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{BC\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$BD=AB\sin\alpha=\frac{BC\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

$=\frac{27.3\cos 50°1'\sin 54°40'}{\sin(54°40'-50°1')}$

≈ 176.53(m).

$CD=BD-BC=176.53-27.3\approx 149$(m).

所以，山的高度约为 149 米.

变式 2　$100\sqrt{6}$　**解析：**由题意得，$\angle CAB=30°$，$\angle ACB=75°-30°=45°$. 在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin 45°}$. 解得 $BC=300\sqrt{2}$ m. 在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\frac{DC}{BC}=\tan\angle DBC=\tan 30°$. 解得 $CD=100\sqrt{6}$ m.

变式 3　因为在$\triangle ACD$中，$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=60°-\angle DAC=30°$，所以 $CD=AC=0.1$ km. 又$\angle BCD=180°-60°-60°=60°$，故 CB 是$\triangle CAD$底边 AD 的中垂线，所以 $BD=BA$.

因为在$\triangle ABC$中，$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，

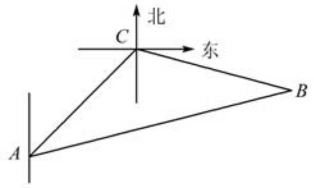
所以 $AB=\frac{AC\sin 60°}{\sin 15°}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$(km).

所以 $BD=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$ km.

故 B，D 间的距离为$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$ km.

课本例 11

变式 1　如图，点 A，C 分别表示缉私艇、走私船的位置. 设经过 x 小时后缉私艇在 B 处追上走私船.



由题意，知 $AB=14x$，$BC=10x$，$\angle ACB=120°$.

由余弦定理，得$(14x)^2=12^2+(10x)^2-240x\cos 120°$.

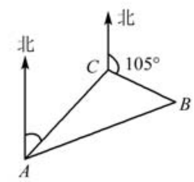
解得 $x=2$.

$\therefore AB=28$，$BC=20$.

由正弦定理，得 $\sin\alpha=\frac{BC\sin 120°}{AB}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{28}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

故追击所需的时间为 2 小时，$\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

变式 2　设经过 x 小时后舰艇在 B 处靠近渔轮. 由题意，得 $AB=21x$，$BC=9x$，$\angle ACB=120°$. 由正弦定理，得



$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin\angle ACB}{AB}$

$=\frac{9x\sin 120°}{21x}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

所以$\angle BAC\approx 21.8°$，方位角为 $45°+21.8°=66.8°$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times 10\times 9x\cos 120°$，

即 $36x^2-9x-10=0$.

解得 $x=-\frac{5}{12}$或$\frac{2}{3}$.

$\because x>0$，$\therefore x=\frac{2}{3}$.

所以舰艇靠近渔轮需要 40 min.

因此，舰艇应沿着方位角 66.8°的方向航行，经过 40 min 就可靠近渔轮.

第 17 课时　解三角形的综合运用复习课

例 1　(1)因为$\left(b-\frac{c}{2}\right)\sin B+\left(c-\frac{b}{2}\right)\sin C-a\sin A=0$，由正弦定理，得$\left(b-\frac{c}{2}\right)b+\left(c-\frac{b}{2}\right)c-a^2=0$.

化简，得 $b^2+c^2-a^2-bc=0$.

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理，可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$.

所以 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$.

所以 $b+c=2(\sin B+\sin C)=2\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=2\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=3\sin B+\sqrt{3}\cos B$

$=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，

所以$\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，即$\frac{1}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$.

所以 $b+c\in(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

变式　(1)$\because f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，∴函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)∵$f(A)=\frac{1}{2}$，∴$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

∵$0<A<\pi$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$AB>BC$，∴$A=\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理，得 $\sin C=\frac{AB\sin A}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$0<C<\pi$，∴$C=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

当 $C=\frac{\pi}{3}$ 时，$B=\frac{\pi}{2}$，此时△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=2\sqrt{3}$；

当 $C=\frac{2\pi}{3}$ 时，$B=\frac{\pi}{6}$，此时△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\sqrt{3}$.

综上所述，△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

例 2 (1)由已知，得 $\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{QP}=(\sqrt{3}-\cos x,1-\sin x)$.

所以 $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}=3-\sqrt{3}\cos x+1-\sin x$

$=4-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

(2)因为 $f(A)=4$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

又 $0<A<\pi$，所以 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$. 所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理，得 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=2\sqrt{3}\sin B$，$AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=2\sqrt{3}\sin C$.

所以△ABC 的周长为 $3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$

$=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)$

$=3+\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=3+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $0<B<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$.

所以当 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{6}$ 时，

△ABC 的周长取得最大值，最大值为 $3+2\sqrt{3}$.

变式 (1)因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$.

由正弦定理，得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$.

又 $\sin B\neq0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$.

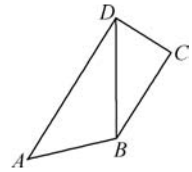
因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，及 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，得 $7=4+c^2-2c$，即 $c^2-2c-3=0$.

因为 $c>0$，所以 $c=3$.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 3 如图所示.



(1)在△ABD 中，由正弦定理，得 $\frac{5}{\sin45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$.

∴$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

∵$\angle ADB<90^\circ$，

∴$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\sin^2\angle ADB}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

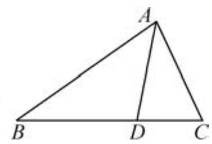
(2)∵$\angle ADB+\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，

∴$\cos\angle BDC=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\angle ADB\right)=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由余弦定理，得 $\cos\angle BDC=\frac{DC^2+BD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot DC}$.

∴$\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{8+25-BC^2}{2\times5\times2\sqrt{2}}$. ∴$BC=5$.

变式 (1)如图所示.



在△ABD 中，由正弦定理，得

$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$.

在△ADC 中，由正弦定理，得

$\frac{AD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$.

因为 AD 平分$\angle BAC$，$BD=2DC$，所以 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{DC}{BD}=\frac{1}{2}$.

(2)因为$\angle C=180^\circ-(\angle BAC+\angle B)$，$\angle BAC=60^\circ$，所以

$\sin C=\sin(\angle BAC+\angle B)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$.

因为 $2\sin B=\sin C$，所以 $\frac{3}{2}\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$.

所以 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$\angle B=30^\circ$.

章末检测

1. A **2.** B **3.** A **4.** B **5.** C **6.** C **7.** C **8.** C **9.** B

10. C **11.** C **12.** D **13.** $\sqrt{3}$ **14.** 北偏东 30° $\sqrt{3}a$

15. $\sqrt{3}$ **16.** $\sqrt{2}$

17. (1)方法一：由题意，知 $\overrightarrow{AB}=(3,5)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1)$，

则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2,6)$，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4,4)$.

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}$.

故所求的两条对角线的长分别为 $2\sqrt{10}$ 和 $4\sqrt{2}$.

方法二：设该平行四边形的第四个顶点为 D，两条对角线的交点为 E，则 $E(0,1)$，$D(1,4)$.

故所求的两条对角线的长分别为

$BC=4\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{10}$.

(2)由题意，知

$\overrightarrow{OC}=(-2,-1)$，$\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}=(3+2t,5+t)$.

由$(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$，

得$(3+2t,5+t)\cdot(-2,-1)=0$，

即$-2(3+2t)-(5+t)=0$.解得$t=-\dfrac{11}{5}$.

18. (1)由已知，得$\overrightarrow{AC}=(3\cos\alpha-4,3\sin\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(3\cos\alpha,3\sin\alpha-4)$.

$\because|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，

$\therefore\sqrt{(3\cos\alpha-4)^2+9\sin^2\alpha}=\sqrt{9\cos^2\alpha+(3\sin\alpha-4)^2}$.

解得$\sin\alpha=\cos\alpha$.

$\because$因为$\alpha\in(-\pi,0)$，$\therefore\alpha=-\dfrac{3\pi}{4}$.

(2)$\because\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，

$\therefore(3\cos\alpha-4)\cdot3\cos\alpha+3\sin\alpha\cdot(3\sin\alpha-4)=0$.

$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$，平方得$\sin2\alpha=-\dfrac{7}{16}$.

$\therefore\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha=-\dfrac{7}{16}$.

19. (1)由正弦定理，得$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，

即$a^2=b^2+c^2+bc$.

由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

$\therefore\cos A=-\dfrac{1}{2}$.$\because A\in(0^\circ,180^\circ)$，$\therefore A=120^\circ$.

(2)由(1)得$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$，

即$\dfrac{3}{4}=(\sin B+\sin C)^2-\sin B\sin C$.

又$\sin B+\sin C=1$，得$\sin B\sin C=\dfrac{1}{4}$.

联立两式得$\sin B=\sin C=\dfrac{1}{2}$.

因为$0^\circ<B<90^\circ$，$0^\circ<C<90^\circ$，故$B=C=30^\circ$.

所以$\triangle ABC$是等腰钝角三角形.

20. (1)$\because\overrightarrow{OP}=\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right),-1\right)=(-2\sin x,-1)$，

$\overrightarrow{OQ}=\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right),\cos2x\right)=(-\cos x,\cos2x)$，

$\therefore f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-2\sin x,-1)\cdot(-\cos x,\cos2x)$

$=\sin2x-\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore f(x)$的最大值和最小值分别是$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$.

(2)$\because f(A)=1$，$\therefore\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore2A-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$或$2A-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

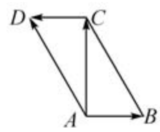
$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$或$A=\dfrac{\pi}{2}$.

又$\because\triangle ABC$为锐角三角形，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$.

$\because bc=8$，

$\therefore\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

21. 如图所示，$\overrightarrow{AB}$为水流速度，$\overrightarrow{AD}$为船的速度，$\overrightarrow{AC}$为实际航速.当$AC\perp AB$时，航程最短.此时，根据题意，



$|\overrightarrow{AB}|=2$ km/h，$|\overrightarrow{AD}|=4$ km/h，

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}=2\sqrt{3}$(km/h).

所以$\angle CAD=30^\circ$，用时$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=0.5$(h).

所以，当船头与水流方向成120°时，航程最短，此时需要0.5 h行驶完全程.

22. (1)$\because|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{n}|^2=\sin B\sin C$，

$\therefore(\sin B+\sin C)^2-\sin^2A=\sin B\sin C$，

即$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A+2\sin B\sin C=\sin B\sin C$.

$\therefore\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=-\sin B\sin C$.

由正弦定理，得$b^2+c^2-a^2=-bc$.

$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

$\therefore B+C=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\because B+C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore0<B<\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$.$\therefore\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant1$.

故$\sin B+\sin C$的取值范围为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

第七章　复数

第1课时　数系的扩充和复数的概念

课本例1

变式1　(1)当m满足$m^2-m-6=0$，即$m=-2$或$m=3$时，z为实数.

(2)当m满足$m^2-m-6\neq0$，即$m\neq-2$且$m\neq3$时，z为虚数.

(3)当m满足$\begin{cases}m^2-3m=0,\\m^2-m-6\neq0,\end{cases}$

即$m=0$时，z为纯虚数.

变式2　(1)当x满足$\begin{cases}x^2-2x-15=0,\\x+3\neq0,\end{cases}$

即$x=5$时，z是实数.

(2)当x满足$\begin{cases}x^2-2x-15\neq0,\\x+3\neq0,\end{cases}$

即$x\neq-3$且$x\neq5$时，z是虚数.

(3)当 x 满足 $\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+3}=0,\\ x^2-2x-15\neq0,\\ x+3\neq0,\end{cases}$

即 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，z 是纯虚数.

例　$\dfrac{1}{12}$　$-\dfrac{1}{2}$　**解析**：由题意，得

$(x^2+x+3m)-(2x+1)i=0+0i.$

所以 $x^2+x+3m=0$ 且 $2x+1=0$.

所以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 且 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+3m=0$.

所以 $m=\dfrac{1}{12}$.

变式 1　由复数相等的定义，得 $\begin{cases}x_0^2+mx_0=-1,\\ 2x_0=-m.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=1,\\ m=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-1,\\ m=2.\end{cases}$

因此，当 $m=-2$ 时，原方程的实根 x_0 为 1；当 $m=2$ 时，原方程的实根 x_0 为 -1.

变式 2　由复数相等的定义，得

$\begin{cases}3x_0^2-\dfrac{m}{2}x_0-1=0,\\ 10-x_0-2x_0^2=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=2,\\ m=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\dfrac{5}{2},\\ m=-\dfrac{71}{5}.\end{cases}$

因此，当 $m=11$ 时，原方程的实根 x_0 为 2；

当 $m=-\dfrac{71}{5}$ 时，原方程的实根为 x_0 为 $-\dfrac{5}{2}$.

第 2 课时　复数的几何意义

课本例 2

变式　(1)点 Z 在复平面的第二象限内，

则 $\begin{cases}\dfrac{a^2-a-6}{a+3}<0,\\ a^2-2a-15>0.\end{cases}$ 解得 $a<-3$.

(2)点 Z 在实轴的上方，则 $\begin{cases}a^2-2a-15>0,\\ a+3\neq0,\end{cases}$

即 $(a+3)(a-5)>0$. 解得 $a>5$ 或 $a<-3$.

例　$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$|z_2|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，$\therefore |z_1|>|z_2|$.

变式　B　**解析**：因为 $|z_1|=\sqrt{a^2+4}$，$|z_2|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，所以 $\sqrt{a^2+4}<\sqrt{5}$，即 $a^2+4<5$.

所以 $a^2<1$，即 $-1<a<1$.

第 3 课时　复数的加、减运算及其几何意义

课本例 1

变式　(1)$-2-i$　**解析**：$(2-3i)+(-4+2i)=(2-4)+(-3+2)i=-2-i$.

(2)$\sqrt{2}$　**解析**：$z_1-z_2=[(3x-4y)+(y-2x)i]-[(-2x+y)+(x-3y)i]=[(3x-4y)-(-2x+y)]+[(y-2x)-(x-3y)]i=(5x-5y)+(-3x+4y)i=5-3i$.

所以 $\begin{cases}5x-5y=5,\\ -3x+4y=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$

所以 $z_1=3-2i$，$z_2=-2+i$. 所以 $z_1+z_2=1-i$.

所以 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

课本例 2

变式　(1)因为 $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{AO}$ 表示的复数为 $-3-2i$.

(2)因为 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，所以对角线 $\overrightarrow{CA}$ 表示的复数为 $(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.

(3)因为对角线 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，所以对角线 $\overrightarrow{OB}$ 表示的复数为 $(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$.

例　因为 $|z|=1$ 且 $z\in\mathbf{C}$，故表示 z 对应的点分布在以原点为圆心、以 1 为半径的圆上.

所以 $|z-2-2i|$ 的几何意义为单位圆上的点到复平面上的点 $P(2,2)$ 的距离.

所以 $|z-2-2i|$ 的最小值为 $|OP|-1=2\sqrt{2}-1$.

变式 1　3　1　**解析**：由于 z 满足 $|z-2|=1$，由复数的几何意义知 z 分布在以 $(2,0)$ 为圆心的圆上，故 $|z|$ 最大值为 3，最小值为 1.

变式 2　C　**解析**：由 $|z+1|=|z-i|$ 知，在复平面内，复数 z 对应的点的轨迹是以 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 为端点的线段的垂直平分线，即直线 $y=-x$. 而 $|z+i|$ 表示直线 $y=-x$ 上的点到点 $(0,-1)$ 的距离，其最小值等于点 $(0,-1)$ 到直线 $y=-x$ 的距离，即为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

第 4 课时　复数的乘、除运算

课本例 3、**例** 4

变式 1　5　**解析**：因为 $(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i$，所以 z 的实部是 5.

变式 2　A　**解析**：$(1+ai)(2+i)=2-a+(1+2a)i$. 因为复数为纯虚数，所以有 $2-a=0$ 且 $1+2a\neq0$. 解得 $a=2$.

课本例 5

变式 1　A　**解析**：$\because z(2-i)=11+7i$，

$\therefore z=\dfrac{11+7i}{2-i}=\dfrac{(11+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{15+25i}{5}=3+5i$.

变式 2　A　**解析**：$\dfrac{1+ai}{2-i}=\dfrac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2-a}{5}+\dfrac{1+2a}{5}i$.

由 $\dfrac{1+ai}{2-i}$ 是纯虚数，得 $\dfrac{2-a}{5}=0$ 且 $\dfrac{1+2a}{5}\neq0$. 解得 $a=2$.

课本例 6

变式 1　(1)$\because \Delta=b^2-4ac=-7<0$，$\therefore$ 方程无实数根.

由求根公式，得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$.

所以原方程的根为 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$.

(2)由 $x^3=1$,得 $x^3-1=0$.

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$.

$\therefore x=1$ 或 $x^2+x+1=0$.

对 $x^2+x+1=0$ 由求根公式,得 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

所以原方程的根为 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

变式 2 $\because 2-i$ 为方程的根,

$\therefore (2-i)^2+b(2-i)+c=0$.

$\therefore 3+2b+c+(-4-b)i=0$.

$\therefore \begin{cases}3+2b+c=0,\\-4-b=0.\end{cases}$

$\therefore b=-4,c=5$.

章末检测

1. A **2.** A **3.** A **4.** C **5.** A **6.** C **7.** D **8.** B **9.** B

10. D **11.** B **12.** A **13.** -3 **14.** $\frac{1}{4}$ **15.** $2\sqrt{5}$ **16.** ⑤

17. (1)要使复数 z 为实数,需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0.\end{cases}$

解得 $m=-2$ 或 -1. 故当 $m=-2$ 或 -1 时,z 是实数.

(2)要使复数 z 为纯虚数,需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m^2+3m+2\neq 0.\end{cases}$

解得 $m=3$. 即当 $m=3$ 时,z 是纯虚数.

18. (1)因为 $z=\frac{-2i+3+3i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}=1+i$,

所以 $\bar{z}=1-i$.

(2)由题意,得 $a(1+i)+b=1-i$,即 $a+b+ai=1-i$.

解得 $a=-1,b=2$.

19. 因为 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$,

$z_2=a-2-i,\bar{z}_2=a-2+i$,

所以 $|z_1-\bar{z}_2|=|(2+3i)-(a-2+i)|$

$=|4-a+2i|=\sqrt{(4-a)^2+4}$.

又因为 $|z_1|=\sqrt{13}$,$|z_1-\bar{z}_2|<|z_1|$,

所以 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$,即 $a^2-8a+7<0$.

解得 $1<a<7$. 所以 a 的取值范围是 $(1,7)$.

20. (1)$z_1+z_2=(m^2+2m-3)+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2}\right)i$.

$\because z_1+z_2$ 是纯虚数,$\therefore \begin{cases}m^2+2m-3=0,\\\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2}\neq 0.\end{cases}$ 解得 $m=1$.

(2)由(1)得 $z_1=1+\frac{1}{2}i,z_2=-1+\frac{1}{2}i$,

则 $\bar{z}_2=-1-\frac{1}{2}i$.

$\therefore z_1\cdot\bar{z}_2=\left(1+\frac{1}{2}i\right)\left(-1-\frac{1}{2}i\right)$

$=-\left(1+\frac{1}{2}i\right)^2=-\left(\frac{3}{4}+i\right)=-\frac{3}{4}-i$.

21. $\because (z_1-2)(1+i)=1-i$,

$\therefore z_1-2=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$.

$\therefore z_1=2-i$.

设 $z_2=a+2i(a\in\mathbf{R})$,

则 $z_1\cdot z_2=(2-i)(a+2i)=(2a+2)+(4-a)i$.

又 $\because z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$,$\therefore 4-a=0$,即 $a=4$. $\therefore z_2=4+2i$.

22. (1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z^2=a^2-b^2+2abi$.

由题意,得 $a^2+b^2=2$ 且 $2ab=2$.

解得 $a=b=1$ 或 $a=b=-1$.

所以 $z=1+i$ 或 $z=-1-i$.

(2)当 $z=1+i$ 时,$z^2=2i,z-z^2=1-i$,

所以对应点的坐标分别为 $A(1,1),B(0,2),C(1,-1)$,$S_{\triangle ABC}=1$;

当 $z=-1-i$ 时,$z^2=2i,z-z^2=-1-3i$,

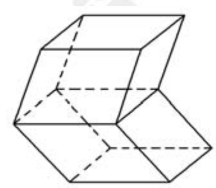
所以对应点的坐标分别为 $A(-1,-1),B(0,2),C(-1,-3)$,$S_{\triangle ABC}=1$.

综上所述,$\triangle ABC$ 的面积为 1.

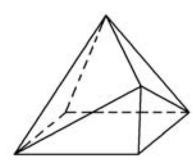
第八章　立体几何初步

第 1 课时　基本立体图形(1)

例 1 (5)(6) **解析:**(1)下图的几何体就符合“有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形”,但它显然不是棱柱.



(2)下图的几何体就符合“有一个面是多边形,其余各面都是三角形”,但它显然不是棱锥.



(3)必须是用与棱锥底面平行的平面去截,底面与截面之间的部分多面体才是棱台.

(4)如果棱柱有一个侧面是矩形,只能保证这个侧面的侧棱垂直于该侧面的底边,其余侧面的侧棱与相应底边不一定垂直,因此其余侧面不一定是矩形.

(5)正确.

(6)正确.

(7)这里不能保证各个侧棱交于一点,因此不一定是棱台.

(8)这里不能保证底面为正方形,因此不一定是正方体.

变式 (1)这是一个上、下底面是平行四边形,4 个侧面也是平行四边形的四棱柱.

(2)这是一个六棱锥.

(3)这是一个三棱台.

例 2 (1)这个长方体是棱柱,是四棱柱,因为它满足棱柱的定义.

(2)截面 $BCFE$ 右侧的部分是三棱柱,它的底面是 $\triangle BEB_1$ 与 $\triangle CFC_1$,侧棱是 EF,B_1C_1,BC.截面左侧的部分是四棱柱,它的底面是四边形 $ABEA_1$ 与四边形 $DCFD_1$,侧棱是 AD,BC,EF,A_1D_1.

变式 1 ①③④　⑥　⑤　**解析**:结合棱柱、棱锥和棱台的定义可知①③④是棱柱,⑥是棱锥,⑤是棱台.

变式 2 ∵点 E,F 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点,且 $A_1B_1=AB,A_1C_1=AC,B_1C_1=BC$,

∴$\frac{A_1E}{AB}=\frac{A_1F}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$.

∴$\triangle A_1EF\backsim\triangle ABC$ 且 AA_1,BE,CF 延长后交于一点.

又平面 $A_1B_1C_1$∥平面 ABC,

∴几何体 $ABC\text{-}A_1EF$ 是三棱台.其中$\triangle ABC$ 是下底面,$\triangle A_1EF$ 是上底面,四边形 $ABEA_1$,四边形 $BCFE$,四边形 $ACFA_1$ 是侧面.

变式 3 C

例 3 (1)五棱柱　(2)五棱锥　(3)三棱台

解析:各展开图对应的几何体如图所示:

(1)　(2)　(3)

故(1)是五棱柱,(2)是五棱锥,(3)是三棱台.

变式 1 三棱锥　**解析**:由于点 E,F 分别为 AB,BC 的中点,折起后 A,B,C 三点重合,DA,DC 重合,EA,EB 重合,FB,FC 重合,故会形成一个三棱锥.

变式 2 如图 1 所示,沿正三角形三边中点的连线折起,可拼得一个底面为正三角形的三棱锥.如图 2 所示,正三角形的三个角上剪出三个相同的四边形,其较长的一组邻边为三角形边长的 $\frac{1}{4}$,有一组对角为直角,余下的部分按虚线折起,可成为一个缺上底面(为正三角形)的三棱柱,而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个三棱柱的上底面.

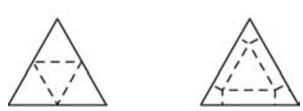


图1　图2

例 4 把长方体含 AC_1 的面作展开图,如图所示,有三种情形:

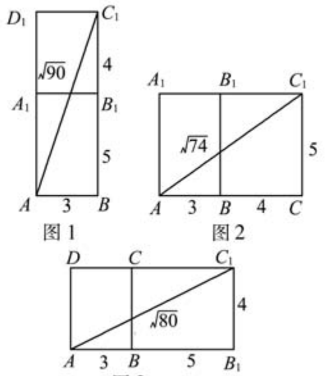
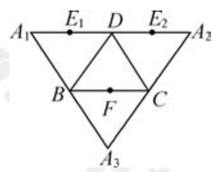


图1　图2　图3

利用勾股定理可得 AC_1 的长分别为 $\sqrt{3^2+(4+5)^2}=3\sqrt{10}$,$\sqrt{5^2+(4+3)^2}=\sqrt{74}$,$\sqrt{4^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$.

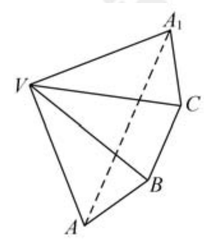
由此可见图 2 是最短路线,其路程的最小值为 $\sqrt{74}$.

变式 1 (1)该几何体的表面展开图如图所示:



(2)由该几何体的展开图知,四边形 A_1BCD 为菱形.四边形 A_2CBD 为菱形.若使由 F 向 E 所架设的灯管长度最短,可在展开图中连接线段 E_1F,E_2F,这两条线段的长均为 10 m,故所用灯管最短为 20 m.

变式 2 将三棱锥沿侧棱 VA 剪开,并将其侧面平铺在一个平面上,如图所示,线段 AA_1 的长即为所求$\triangle AEF$ 周长的最小值.



∵$\angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=30^\circ$,

∴$\angle AVA_1=90^\circ$.

又 $VA=VA_1=4$,∴$AA_1=4\sqrt{2}$.

∴$\triangle AEF$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$.

第 2 课时　基本立体图形(2)

例 1 (1)(3)(5)　**解析**:(1)(3)(5)是正确的;(2)连接圆柱上、下底面圆周上两点的线段不一定与圆柱的轴平行,因此不一定是母线;(4)必须是用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,这样截面与底面之间的几何体才是圆台.

变式 C　**解析**:由圆锥的概念知,直角三角形绕它的一条直角边所在直线旋转一周所围成的几何体是圆锥,强调一定要绕着它的一条直角边,即旋转轴为直角三角形的一条直角边所在的直线,因而 C 错.

例 2 (1)是由两个圆台拼接而成的组合体.

(2)是由一个圆台挖去一个圆锥得到的组合体.

(3)是在一个圆柱中挖去一个三棱柱后得到的组合体.

变式 1 D **解析:**选项 A 是圆柱,B 是圆锥,C 是球,D 是一个圆台挖去一个圆锥得到的组合体.

变式 2 分割原图,使它的每一部分都是简单几何体.

(1)是由一个三棱柱和一个四棱柱拼接而成的简单组合体.

(2)是由一个圆锥和一个四棱柱拼接而成的简单组合体.

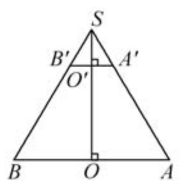
课本例 2

变式 1 (1)—C (2)—B (3)—D (4)—A

变式 2 D

变式 3 A

例 3 设圆台的母线长为 l,由截得的圆台上、下底面面积之比为 1∶16,可设截得的圆台上、下底面的半径分别为 r,$4r$.过轴 SO 作截面,如图所示.



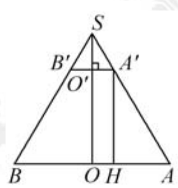
则$\triangle SO'A'\backsim\triangle SOA$,$SA'=3$ cm.

$\because \dfrac{SA'}{SA}=\dfrac{O'A'}{OA}$,$\therefore \dfrac{3}{3+l}=\dfrac{r}{4r}=\dfrac{1}{4}$.

解得 $l=9$ cm.

故圆台的母线长为 9 cm.

变式 过轴 SO 作截面,并过点 A' 作 $A'H\perp AB$,垂足为点 H.



∵圆台上底面的半径为 1 cm,

∴下底面的半径为 4 cm.

$\therefore AH=3$ cm.

如图所示,在 Rt$\triangle A'HA$ 中,

$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$(cm).

故圆台的高为 $6\sqrt{2}$ cm.

第 3 课时 立体图形的直观图

课本例 1

变式 (1)如图 1,在菱形 $ABCD$ 中,取 AC 所在直线为 x 轴,BD 所在直线为 y 轴,两轴相交于点 O.在图 2 中画相应的 x'轴与 y'轴,两轴相交于点 O',使$\angle x'O'y'=45°$.

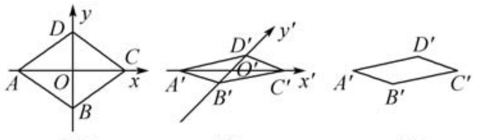


图1　　图2　　图3

(2)O'为中点,在 x'轴上取 $A'C'=AC$,在 y'轴上取$B'D'=\dfrac{1}{2}BD$.

(3)连接 $A'B'$,$B'C'$,$C'D'$,$D'A'$,并擦去辅助线 x'轴和 y'轴,便获得菱形 $ABCD$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'$,如图 3.

课本例 2、**例** 3

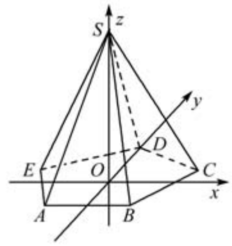
变式 画法:

(1)画轴.画 x 轴、y 轴、z 轴,三轴交于点 O,使$\angle xOy=45°$,$\angle xOz=90°$.

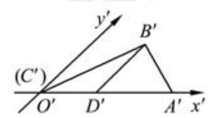
(2)画底面.画出正五边形的直观图.

(3)确定顶点.在 z 轴上取线段 OS.

(4)成图.连接 AS,BS,CS,DS,ES,整理得到正五棱锥的直观图.



例 画 x'轴、y'轴,两轴交于点 O',使$\angle x'O'y'=45°$,作$\triangle ABC$ 的直观图,如图所示.

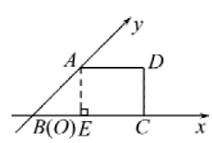


则其底边 $A'C'=AC=10$ cm,$B'D'=\dfrac{1}{2}BD=5$ cm.故$\triangle A'B'C'$的高为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}B'D'=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\times 10\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$($\mathrm{cm}^2$).故直观图的面积为$\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$ cm^2.

变式 1 16 **解析:**由图易知$\triangle AOB$ 中,底边 $OB=4$,底边 OB 上的高线长为 8,

∴面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 4\times 8=16$.

变式 2 $2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **解析:**过点 A 作 $AE\perp BC$,垂足为点 E.



$\because DC\perp BC$ 且 $AD\parallel BC$,

∴四边形 $ADCE$ 是矩形.$\therefore EC=AD=1$.

$\because\angle ABC=45°$,$AB=1$,$\therefore BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

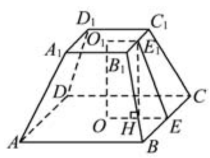
∴原平面图形是梯形,且上、下两底边长分别为 1 和 $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,高为 2.

∴原平面图形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\left[1+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\times 2=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

第4课时　棱柱、棱锥、棱台的表面积与体积

课本例1

变式　如图，E，E_1 分别是 BC，B_1C_1 的中点，点 O_1，O 分别是上、下底面正方形的中心，则 O_1O 为正四棱台的高，$O_1O=12$. 连接 OE，O_1E_1，



则 $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times12=6$，$O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=3$.

过点 E_1 作 $E_1H\perp OE$，垂足为点 H，则 $E_1H=O_1O=12$，$OH=O_1E_1=3$，$HE=OE-OH=6-3=3$.

在 $Rt\triangle E_1HE$ 中，$E_1E^2=E_1H^2+HE^2=12^2+3^2=153$，

所以 $E_1E=3\sqrt{17}$.

所以 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(B_1C_1+BC)\times E_1E=2\times(6+12)\times3\sqrt{17}=108\sqrt{17}$.

课本例2

变式1　$\frac{1}{6}$　**解析**：$V_{D_1\text{-}EDF}=V_{F\text{-}DD_1E}=\frac{1}{3}S_{\triangle D_1DE}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$.

变式2　设棱台的高为 h，$S_{\triangle ABC}=S$，则 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=4S$.

$\therefore V_{A_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}Sh$，

$V_{C\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot h=\frac{4}{3}Sh$.

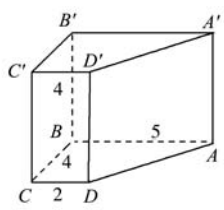
又 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+2S+4S)=\frac{7}{3}Sh$，

$\therefore V_{B\text{-}A_1B_1C}=V_{台}-V_{A_1\text{-}ABC}-V_{C\text{-}A_1B_1C_1}$

$=\frac{7}{3}Sh-\frac{Sh}{3}-\frac{4Sh}{3}=\frac{2}{3}Sh$.

$\therefore$三棱锥 $A_1\text{-}ABC$，三棱锥 $B\text{-}A_1B_1C$，三棱锥 $C\text{-}A_1B_1C$ 的体积之比为 $1:2:4$.

变式3　56　**解析**：由几何体的三视图可知，该几何体是底面为直角梯形的直四棱柱，如图所示.



$\therefore$其体积为 $\frac{1}{2}\times(2+5)\times4\times4=56$.

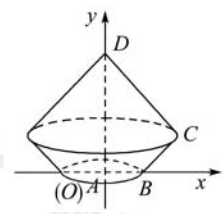
第5课时　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积与体积

例1　C　**解析**：设圆锥底面半径为 r. 则高 $h=2r$. $\therefore$其母线长 $l=\sqrt{5}r$. $\therefore S_{侧}=\pi rl=\sqrt{5}\pi r^2$，$S_{底}=\pi r^2$. $\therefore S_{底}:S_{侧}=1:\sqrt{5}$.

变式　2　**解析**：设变化之前圆台的母线长为 l，上底面半径为 r，下底面半径为 R，则其侧面积为 $\pi(r+R)l$. 变化后圆台的母线长为 $2nl$，上底面半径为 $\frac{r}{n}$，下底面半径为 $\frac{R}{n}$，则变化后圆台的侧面积为 $\pi\left(\frac{r}{n}+\frac{R}{n}\right)\cdot2nl=2\pi(r+R)l$. 故变化后圆台的侧面积为原来的2倍.

例2　B　**解析**：依题意知，该几何体是以$\sqrt{2}$为底面半径，$\sqrt{2}$为高的两个同底圆锥组成的组合体，则其体积为 $\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}\times2=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. 故选B.

变式1　如图所示，旋转得到一个圆锥和圆台的组合体.



$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2=\frac{8}{3}\pi$，

$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi\times1\times(2^2+1^2+2\times1)=\frac{7}{3}\pi$.

所以 $V=V_{圆锥}+V_{圆台}=5\pi$.

变式2　设圆柱的母线长为 l，底面圆的半径为 r.

当 $l=2a$ 时，$2\pi r=a$，故 $r=\frac{a}{2\pi}$，

这时 $V_{圆柱}=2a\cdot\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2=\frac{a^3}{2\pi}$；

当 $l=a$ 时，$2\pi r=2a$，

故 $r=\frac{a}{\pi}$，这时 $V_{圆柱}=a\cdot\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^2=\frac{a^3}{\pi}$.

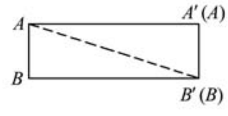
因此圆柱的体积为$\frac{a^3}{2\pi}$或$\frac{a^3}{\pi}$.

例3　D　**解析**：设圆柱的高为 h，则有 $\pi R^2h=3\times\frac{4}{3}\pi R^3$. 解得 $h=4R$.

变式　B　**解析**：设两个球的半径分别为 r_1，r_2，则$\frac{V_1}{V_2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}=\frac{8}{27}$. $\therefore\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$. $\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{4}{9}$.

第6课时　空间几何体习题课(1)

例1　把圆柱的侧面沿 AB 剪开，然后展开成平面图形，如图所示，连接 AB'，则 AB'即为蚂蚁爬行的最短距离.

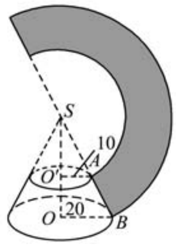


$\because AB=A'B'=2$，且 $AA'=2\pi\times1=2\pi$，

$\therefore AB'=\sqrt{A'B'^2+AA'^2}=\sqrt{4+(2\pi)^2}=2\sqrt{1+\pi^2}$.

故蚂蚁爬行的最短距离为 $2\sqrt{1+\pi^2}$.

变式 600π **解析**:如图所示,设圆台的上底面周长为 C,半径为 r.



∵扇环的圆心角是 $180°$,

∴$C=\pi\cdot SA=2\pi\times 10$.∴$SA=20$.

同理 $SB=40$.∴$AB=20$.

∴$S_{圆台侧}=\pi(r+R)\cdot AB=\pi\times(10+20)\times 20=600\pi$.

例 2 由题意知,$S_1=2\pi\cdot 2a\cdot\sqrt{3}a+2\pi\cdot(2a)^2=(4\sqrt{3}+8)\pi a^2$,

$S_2=S_1+\pi a\cdot 2a-\pi a^2=(4\sqrt{3}+9)\pi a^2$.

∴$S_1:S_2=(4\sqrt{3}+8):(4\sqrt{3}+9)$.

变式 由题意知,旋转而成的几何体为圆台中挖去一个半球,故所求旋转体的表面积由三部分组成:圆台下底面、侧面和一半球面.

$S_{半球}=8\pi\ cm^2$,$S_{圆台侧}=35\pi\ cm^2$,$S_{圆台底}=25\pi\ cm^2$.

故所求几何体的表面积为 $68\pi\ cm^2$.

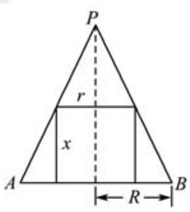
$V_{圆台}=\frac{1}{3}\times\pi\times 4(2^2+2\times 5+5^2)=52\pi\ (cm^3)$,

$V_{半球}=\frac{4}{3}\pi\times 2^3\times\frac{1}{2}=\frac{16}{3}\pi\ (cm^3)$.

所以,所求几何体的体积为

$V_{圆台}-V_{半球}=52\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{140}{3}\pi\ (cm^3)$.

例 3 如图,设圆柱的高为 x,其底面半径为 r,则 $\frac{r}{R}=\frac{h-x}{h}$.



∴$r=\frac{R(h-x)}{h}$.

圆柱的侧面积

$S_{侧}=2\pi rx=\frac{2\pi R}{h}\cdot x(h-x)$

$=-\frac{2\pi R}{h}(x^2-hx)$

$=-\frac{2\pi R}{h}\left[\left(x-\frac{h}{2}\right)^2-\frac{h^2}{4}\right]$

$=-\frac{2\pi R}{h}\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{\pi hR}{2}$.

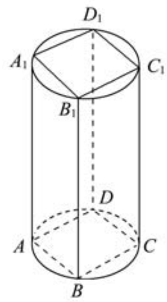
当 $x=\frac{h}{2}$ 时,$(S_{侧})_{最大值}=\frac{\pi hR}{2}$.

即内接圆柱的侧面积最大时圆柱的高为 $\frac{h}{2}$,此时侧面积为 $\frac{1}{2}\pi Rh$.

变式 1 B **解析**:由于长方体的长、宽、高分别为 $2a,a,a$,则长方体体对角线的长为 $\sqrt{(2a)^2+a^2+a^2}=\sqrt{6}a$.

又长方体外接球的直径 $2R$ 等于长方体体对角线的长,所以 $2R=\sqrt{6}a$.所以 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2=6\pi a^2$.

变式 2 设圆柱的底面半径为 r cm,高为 h cm.如图所示,圆柱轴截面长方形对角线的长等于它内接长方体体对角线的长,则



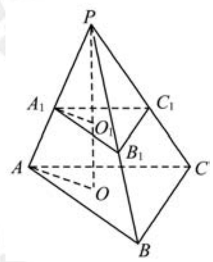
$\begin{cases}(2r)^2+h^2=(10\sqrt{2})^2,\\ 2\pi rh=100\pi.\end{cases}$

∴$\begin{cases}r=5,\\ h=10.\end{cases}$

∴$V_{圆柱}=\pi r^2h=\pi\times 5^2\times 10=250\pi\ (cm^3)$.

第 7 课时　空间几何体习题课(2)

例 1 如图所示,将棱台还原为棱锥,设 PO 是原棱锥的高,O_1O 是棱台的高.



∵棱台上、下底面的面积之比为 $4:9$,

∴它们的底面对应边长之比 $A_1B_1:AB=2:3$.

∴$PA_1:PA=2:3$.

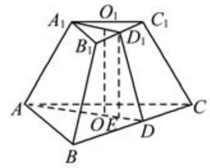
∵$A_1O_1/\!/AO$,

∴$\frac{PO_1}{PO}=\frac{PA_1}{PA}=\frac{2}{3}$,

即 $\frac{PO-O_1O}{PO}=\frac{PO-4}{PO}=\frac{2}{3}$.

∴$PO=12$ cm,即原棱锥的高是 12 cm.

变式 1 设三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 上、下底面中心分别为 O_1,O,BC,B_1C_1 的中点分别为 D,D_1,则 D_1D 为正三棱台的母线.



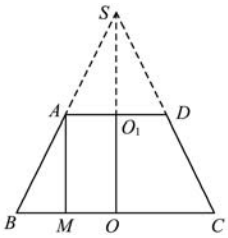
因为正三棱台的上、下底面边长及高分别为 1,2,2,

所以 $O_1D_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$OD=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$O_1O=2$.

过点 D_1 作 $D_1E\perp AD$,垂足为点 E,则在 $Rt\triangle D_1ED$ 中,$D_1E=2$,$ED=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

∴$D_1D=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$.故其母线长为 $\frac{7\sqrt{3}}{6}$.

变式 2　(1)如图,圆台的轴截面是等腰梯形 $ABCD$.



由已知可得上底面半径 $O_1A=2$ cm,下底面半径 $OB=5$ cm,腰长为 12 cm,所以高

$AM=\sqrt{12^2-(5-2)^2}=3\sqrt{15}$ (cm).

(2)设截得此圆台的圆锥的母线长为 l.

由$\triangle SAO_1\backsim\triangle SBO$可得$\dfrac{l-12}{l}=\dfrac{2}{5}$.

∴$l=20$ cm,即截得此圆台的圆锥的母线长为 20 cm.

例 2　A　**解析**:依据斜二测画法的原则可得,$BC=B'C'=2,AO=2A'O'=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},AO\perp BC$. ∴$S=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}$,故选 A.

变式　设原正方形的边长为 a,则对应直观图的面积为 $\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot a=18\sqrt{2}$. 故 $a^2=72$,即原正方形的面积是 72.

例 3　(1)B　**解析**:根据题意,可得截面是边长为 $2\sqrt{2}$的正方形.结合圆柱的特征,可知该圆柱的底面是半径为$\sqrt{2}$的圆,且高为 $2\sqrt{2}$. 所以其表面积 $S=2\pi(\sqrt{2})^2+2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=12\pi$,故选 B.

(2)$\dfrac{4}{3}$　**解析**:由图可知,该多面体为两个全等正四棱锥的组合体,正四棱锥的高为 1,底面正方形的边长等于 $\sqrt{2}$. 所以该多面体的体积为 $2\times\dfrac{1}{3}\times1\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{4}{3}$.

变式 1　D　**解析**:∵$S_1=\pi,S_2=4\pi$,

∴$r=1,R=2$. ∴$S_{侧}=6\pi=\pi(r+R)l$,

∴$l=2$. ∴$h=\sqrt{3}$.

∴$V=\dfrac{1}{3}\pi(1+4+2)\times\sqrt{3}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\pi$. 故选 D.

变式 2　∵圆柱形玻璃容器中水面上升了 4 cm,

∴钢球的体积 $V=\pi\cdot3^2\times4=36\pi$.

设钢球的半径为 R,则$\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

∴$R=3$ cm, 即钢球的半径为 3 cm.

第 8 课时　平面

课本例 1

变式 1　(1)符号表示:$\alpha\cap\beta\cap\gamma=P,\alpha\cap\beta=PA,\alpha\cap\gamma=PB,\beta\cap\gamma=PC$. 用图形表示如图 1.

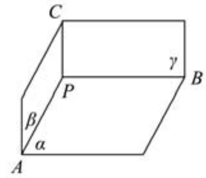


图 1

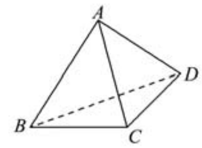


图 2

(2)符号表示:平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$,平面 $ABC\cap$平面 $ADC=AC$. 用图形表示如图 2.

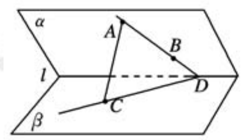
变式 2　文字描述:平面 α 与平面 β 相交于直线 l,点 A,B 在平面 α 内,点 C 在平面 β 内,且三点均不在交线 l 上.

符号描述:$\alpha\cap\beta=l,A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\beta,A\notin l,B\notin l,C\notin l$.

由于 A,B,C 三点不共线,所以确定一个平面.

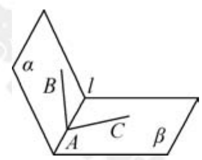
作法:连接 AB 并延长交直线 l 于点 D,连接 AC,DC,则 AD 和 CD 分别为平面 ABC 与平面 α 和平面 β 的交线.

如图所示:



变式 3　文字叙述:点 A 在平面 α 与平面 β 的交线 l 上, AB,AC 分别在平面 α,β 内.

图形表示如图所示:



例 1　设三条直线分别为 a,b,c,且 $a\cap b=A,b\cap c=B,a\cap c=C$,则 A,B,C 三点不重合且不共线.

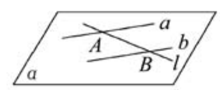
由基本事实 1 可知,A,B,C 三点可以确定一个平面 α,即 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\alpha$.

由 $a\cap b=A,b\cap c=B$ 可知,$A\in b,B\in b$.

由基本事实 2 可知,$b\subset\alpha$.

同理可证 $a\subset\alpha,c\subset\alpha$. 故三条直线在同一平面内.

变式　如图所示.



∵$a/\!/b$,∴过 a,b 有且只有一个平面 α.

设 $a\cap l=A,b\cap l=B$,则 $A\in\alpha,B\in\alpha$,且 $A\in l,B\in l$.

∴$l\subset\alpha$. ∴过 a,b,l 有且只有一个平面.

例 2　∵$AB/\!/CD$,∴AB,CD 共面,设为平面 β.

∴AC 在平面 β 内,即点 E 在平面 β 内.

∵$AB\cap\alpha=B,CD\cap\alpha=D,AC\cap\alpha=E$,

∴B,D,E 为平面 α 与平面 β 的公共点.

根据基本事实 3 可得,B,E,D 三点共线.

变式　∵$MN\cap EF=Q$,

∴$Q\in$ 直线 $MN,Q\in$ 直线 EF.

又∵$M\in$直线 CD，$N\in$直线 AB，
$CD\subset$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，
∴$M,N\in$平面 $ABCD$. ∴$MN\subset$平面 $ABCD$.
∴$Q\in$平面 $ABCD$.
同理可证 $EF\subset$平面 ADD_1A_1.
∴$Q\in$平面 ADD_1A_1.
又∵平面 $ABCD\cap$平面 $ADD_1A_1=AD$，
∴$Q\in$直线 AD，即 D,A,Q 三点共线.

例 3　∵四边形 $EFGH$ 是梯形，且 $EH/\!/FG$，
∴EF 与 GH 的延长线必交于一点，
设交点为 P. ∵$P\in EF$，$EF\subset$平面 ABC.
∴$P\in$平面 ABC.
同理可证 $P\in$平面 DAC.
又∵平面 $ABC\cap$平面 $DAC=AC$，
∴$P\in AC$. ∴EF,GH,AC 相交于一点.

变式　B　**解析**：∵$EF\subset$平面 ABC，$HG\subset$平面 ACD，$EF\cap HG=P$，
∴$P\in$平面 ABC，$P\in$平面 ACD.
又∵平面 $ABC\cap$平面 $ACD=AC$，∴$P\in AC$. 故选 B.

第 9 课时　空间点、直线、平面之间的位置关系

例 1　(1)直线 AA_1 和直线 BC_1 是异面直线.
(2)直线 AD_1 和直线 BC_1 是平行直线.
(3)直线 BD_1 和直线 BC_1 是相交直线.

变式　C　**解析**：c 与 b 可以相交，也可以异面，故选 C.

课本例 2

变式 1　A　**解析**：对于①，∵直线 l 虽与平面 α 内无数条直线平行，但 l 有可能在平面 α 内，∴l 不一定平行于 α. 故①是错误的.
对于②，∵直线 a 在平面 α 外包括两种情况：$a/\!/\alpha$ 和 a 与 α 相交，∴a 和 α 不一定平行. 故②是错误的.
对于③，∵直线 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，只能说明 a 和 b 无公共点，但 a 可能在平面 α 内，∴a 不一定平行于 α. 故③是错误的.
对于④，∵$a/\!/b$，$b\subset\alpha$，那么 $a\subset\alpha$ 或 $a/\!/\alpha$，∴a 可以与平面 α 内的无数条直线平行. 故④是正确的.
综上所述，正确的个数为 1.

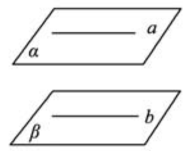
变式 2　(1)与直线 PQ 平行的有底面 $ABCDEF$、底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$、侧面 BB_1C_1C、侧面 EE_1F_1F.
(2)与对角线 BE_1 平行的有侧面 AA_1F_1F、侧面 CC_1D_1D.
与对角线 BE_1 相交的有底面 $ABCDEF$、底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$、侧面 BB_1C_1C、侧面 EE_1F_1F、侧面 AA_1B_1B、侧面 DD_1E_1E.

例 2　有平行和相交两种位置关系.
其中相邻的两个面是相交的关系，相对的两个面是平行的关系.

变式 1　3 对.

变式 2　(3)(4)(5)　**解析**：(1)不正确，因为当两个平面相交时，也会有无数个公共点；(2)不正确，因为当两个平面相交时，也可以作无数条与另一个平面平行的直线；(3)正确，因为一个平面内的任意一条直线与另一个平面无公共点，可以保证两个平面一定无公共点，所以这两个平面一定平行；(4)正确，直接利用定义可知；(5)正确，符合两平面平行的定义.

变式 3　平行或相交　**解析**：如图所示，α 与 β 平行或 α 与 β 相交.



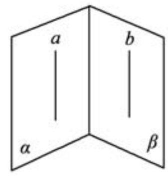
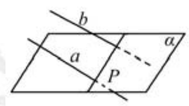
或


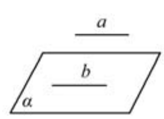
图 1　　图 2

例 3　(1)如图所示.



(2)因为 $a/\!/b$，所以 a 和 b 确定平面 β. 因为 $a\cap$平面 $\alpha=P$，所以平面 α 和平面 β 相交于过 P 点的直线 l.
因为在平面 β 内 l 和两条平行直线 a,b 中的一条直线 a 相交，所以 l 必和 b 相交于点 Q，即 $b\cap l=Q$.
又因为 b 不在平面 α 内(若 b 在 α 内，则 α 和 β 都过两相交直线 b 和 l，因此 α 和 β 重合，a 在 α 内，与已知矛盾)，故直线 b 和平面 α 相交.

变式　$b\subset\alpha$ 或 $b/\!/\alpha$. 如图所示.



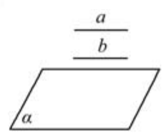


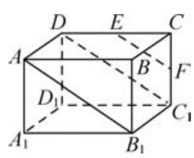
图 1　　图 2

第 10 课时　直线与直线平行

课本例 1

变式 1　因为 EH 是$\triangle ABD$ 的中位线，
所以 $EH\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}BD$.
因为$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，
所以 $FG/\!/BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$.
所以 $EH/\!/FG$(基本事实 4)，$EH<FG$.
由梯形的定义可知四边形 $EFGH$ 为梯形.

变式 2　如图所示，连接 DC_1.



因为在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD\underline{\mathbin{/\!/}}B_1C_1$，所以四

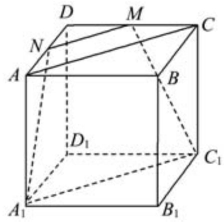
边形 AB_1C_1D 是平行四边形.所以 $AB_1 /\!/ DC_1$.

因为 E,F 分别是 CD,CC_1 的中点，

所以 $EF /\!/ DC_1$.

由基本事实 4 知，$EF /\!/ AB_1$.

例　(1)如图所示，连接 AC.



$\because M,N$ 分别是 CD,AD 的中点，

$\therefore MN$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线.

$\therefore MN /\!/ AC, MN=\frac{1}{2}AC$.

由正方体的性质得

$AC /\!/ A_1C_1, AC=A_1C_1$.

$\therefore MN /\!/ A_1C_1$，且 $MN=\frac{1}{2}A_1C_1$.

$\because MN \neq A_1C_1$，$\therefore$ 四边形 MNA_1C_1 是梯形.

(2)$\because MN /\!/ A_1C_1, ND /\!/ A_1D_1$，

$\therefore \angle DNM$ 与 $\angle D_1A_1C_1$ 相等或互补.

又 $\because \angle DNM$ 与 $\angle D_1A_1C_1$ 均是直角三角形中的锐角，

$\therefore \angle DNM=\angle D_1A_1C_1$.

变式　(1)$\because AA' \cap BB'=O$，且 $\frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B'O}=\frac{2}{3}$，

$\therefore AB /\!/ A'B'$.同理可证 $AC /\!/ A'C', BC /\!/ B'C'$.

(2)$\because AB /\!/ A'B', AC /\!/ A'C'$ 且 AB 和 $A'B'$，AC 和 $A'C'$ 方向相反，

$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$.

同理可证 $\angle ABC=\angle A'B'C', \angle ACB=\angle A'C'B'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

$\because \frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B'O}=\frac{2}{3}$，

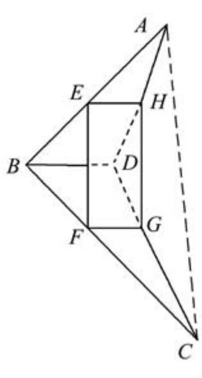
$\therefore \triangle ABO \backsim \triangle A'B'O$ 且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{A'O}=\frac{2}{3}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

第 11 课时　直线与平面平行

课本例 2

变式 1　(1)$\because$ 在 $\triangle ABD$ 中，E,H 分别是 AB,DA 的中点，$\therefore EH$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线.



$\therefore EH /\!/ BD$.

又 $BD \not\subset$ 平面 $EFGH$，

$EH \subset$ 平面 $EFGH$，

$\therefore BD /\!/$ 平面 $EFGH$.

(2)连接 AC.

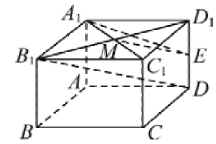
$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，E,F 分别是 AB,BC 的中点，

$\therefore EF /\!/ AC$.

又 $EF \subset$ 平面 $EFGH$，$AC \not\subset$ 平面 $EFGH$，

$\therefore AC /\!/$ 平面 $EFGH$.

变式 2　如图，连接 A_1C_1，B_1D_1.设 $A_1C_1 \cap B_1D_1=M$，连接 ME.



$\because$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是矩形，

$\therefore$ 当 E 是 D_1D 的中点时，

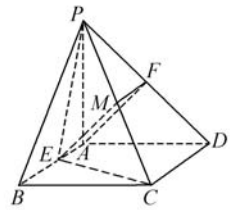
$ME /\!/ B_1D$.

又 $ME \subset$ 平面 A_1C_1E，$B_1D \not\subset$ 平面 A_1C_1E，

$\therefore B_1D /\!/$ 平面 A_1C_1E.

$\therefore$ 当 E 为 DD_1 的中点时，符合要求.

变式 3　如图，取 PC 的中点 M，连接 MF, EM，则有 $FM /\!/ CD$ 且 $FM=\frac{1}{2}CD$.



又 $\because AE=\frac{1}{2}AB, AB \mathrel{\underline{/\!/}} CD$，

$\therefore AE \mathrel{\underline{/\!/}} FM$，即四边形 $AEMF$ 为平行四边形.

$\therefore EM /\!/ AF$.

又 $\because EM \subset$ 平面 PEC，$AF \not\subset$ 平面 PEC，

$\therefore AF /\!/$ 平面 PEC.

课本例 3

变式 1　$\because E,F$ 分别是 AB,AC 的中点，$\therefore EF /\!/ BC$.

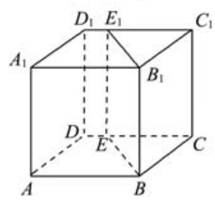
又 $\because BC \subset$ 平面 BCD，$\therefore EF /\!/$ 平面 BCD.

又 $\because EF \subset \alpha, MN \subset \alpha$，且 $\alpha \cap$ 平面 $BCD=MN$，

$\therefore EF /\!/ MN$.

变式 2　B　**解析**：$\because GH /\!/$ 平面 SCD，$GH \subset$ 平面 SBD，且平面 $SBD \cap$ 平面 $SCD=SD$，$\therefore GH /\!/ SD$.显然 GH 与 SA, SC 均不平行.故选 B.

例　如图所示.



$\because CC_1 /\!/ BB_1, BB_1 \subset$ 平面 BEE_1B_1，$CC_1 \not\subset$ 平面 BEE_1B_1，

$\therefore CC_1 /\!/$ 平面 BEE_1B_1.

又 $\because$ 平面 CEE_1C_1 过 CC_1 且交平面 BEE_1B_1 于 EE_1，

$\therefore CC_1 /\!/ EE_1$.

$\because CC_1 /\!/ BB_1$，$\therefore BB_1 /\!/ EE_1$.

变式　$\because EH /\!/ FG, FG \subset$ 平面 BCD，$EH \not\subset$ 平面 BCD，

$\therefore EH /\!/$ 平面 BCD.

$\because EH \subset$ 平面 ABD，平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD=BD$，

$\therefore EH /\!/ BD$.

第 12 课时　平面与平面平行

课本例 4

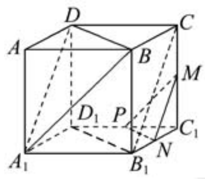
变式 1　$\because D$ 为 PA 的中点，E 为 PB 的中点，

$\therefore DE$ 为 $\triangle PAB$ 的中位线.$\therefore DE /\!/ AB$.

又∵$DE\not\subset$平面ABC,$AB\subset$平面ABC,
∴DE∥平面ABC.同理可证FE∥平面ABC.
又∵$DE\subset$平面DEF,$FE\subset$平面DEF,
且$FE\cap DE=E$,
∴平面DEF∥平面ABC.

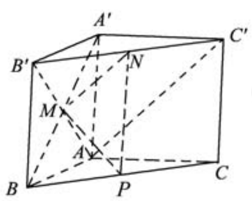
变式2　∵$PM:MA=BN:ND=PQ:QD$,
∴MQ∥AD,NQ∥BP.
∵$BP\subset$平面PBC,$NQ\not\subset$平面PBC,
∴NQ∥平面PBC.
又底面$ABCD$为平行四边形,
∴BC∥AD.∴MQ∥BC.
∵$BC\subset$平面PBC,$MQ\not\subset$平面PBC,
∴MQ∥平面PBC.
又$MQ\cap NQ=Q$,∴平面MNQ∥平面PBC.

变式3　如图所示,连接B_1D_1,B_1C.



∵P,N分别是D_1C_1,B_1C_1的中点,∴PN∥B_1D_1.
又B_1D_1∥BD,∴PN∥BD.
又$PN\not\subset$平面A_1BD,$BD\subset$平面A_1BD,
∴PN∥平面A_1BD.
同理MN∥平面A_1BD.
又$PN\cap MN=N$,
∴平面MNP∥平面A_1BD.

变式4　(1)如图所示,连接AB',AC',则M为AB'的中点.



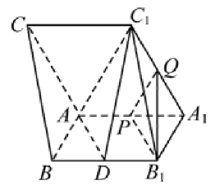
又∵N为$B'C'$的中点,
∴MN∥AC'.
又$MN\not\subset$平面$A'ACC'$,$AC'\subset$平面$A'ACC'$,
∴MN∥平面$A'ACC'$.
(2)∵N,P分别为$B'C'$和BC的中点,
且四边形$B'BCC'$为平行四边形,
∴NP∥CC'.
又$CC'\subset$平面$A'ACC'$,$NP\not\subset$平面$A'ACC'$,
∴NP∥平面$A'ACC'$.
又MN∥平面$A'ACC'$,$NP\cap MN=N$,
MN,$NP\subset$平面MNP,
∴平面MNP∥平面$A'ACC'$.

课本例5

变式1　(1)∵$PB\cap PD=P$,
∴直线PB和PD确定一个平面γ,
且$\alpha\cap\gamma=AC$,$\beta\cap\gamma=BD$.
又α∥β,∴AC∥BD.
(2)由(1)得AC∥BD,∴$\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PC}{CD}$,即$\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{CD}$.
∴$CD=\dfrac{15}{4}$.∴$PD=PC+CD=\dfrac{27}{4}$ (cm).

变式2　∵BE∥AA_1,$AA_1\subset$平面AA_1D,$BE\not\subset$平面AA_1D,∴BE∥平面AA_1D.
∵BC∥AD,$AD\subset$平面AA_1D,$BC\not\subset$平面AA_1D,
∴BC∥平面AA_1D.
又$BE\cap BC=B$,$BE\subset$平面BCE,$BC\subset$平面BCE,
∴平面BCE∥平面AA_1D.
∵平面$A_1DCE\cap$平面$BCE=EC$,平面$A_1DCE\cap$平面$AA_1D=A_1D$,∴EC∥A_1D.

变式3　如图所示,连接AD.



∵D是BB_1的中点,P是AA_1的中点,
∴AP∥DB_1,且$AP=DB_1$.
∴四边形ADB_1P是平行四边形.
∴AD∥PB_1.
又$PB_1\subset$平面PQB_1,$AD\not\subset$平面PQB_1,
∴AD∥平面PQB_1.
∵P,Q分别是AA_1,A_1C_1的中点,
∴AC_1∥PQ.
又$PQ\subset$平面PQB_1,$AC_1\not\subset$平面PQB_1,
∴AC_1∥平面PQB_1.
又$AC_1\cap AD=A$,
∴平面AC_1D∥平面PQB_1.∴C_1D∥平面PQB_1.

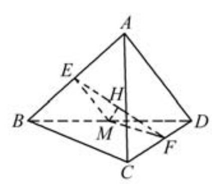
第13课时　直线与直线垂直

课本例1

变式1　(1)90°　(2)45°　(3)90°

解析:(1)根据正方体的性质可得,直线AC和DD_1所成的角是90°.
(2)∵D_1C_1∥DC,∴∠ACD即为直线AC和D_1C_1所成的角.由正方体的性质得∠$ACD=45°$.
(3)∵BD∥B_1D_1,$BD\perp AC$,∴$B_1D_1\perp AC$,即直线AC和B_1D_1所成的角是90°.

变式2　如图所示,取BD的中点M,连接EM,FM.



∵E,F分别是AB,CD的中点,
∴$EM \underline{\mathbin{/\!/}} \dfrac{1}{2}AD$,$FM \underline{\mathbin{/\!/}} \dfrac{1}{2}BC$.
∴∠EMF或其补角就是异面直线AD,BC所成的角.
∵$AD=BC=2$,∴$EM=MF=1$.
在等腰三角形MEF中,过点M作$MH\perp EF$于点H.
在Rt△MHE中,$EM=1$,$EH=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

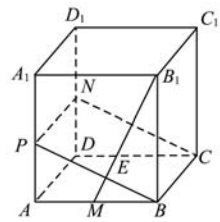
$\therefore \sin\angle EMH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \angle EMH=60°$，$\angle EMF=2\angle EMH=120°$.

∴异面直线 AD，BC 所成的角为 $\angle EMF$ 的补角，即异面直线 AD，BC 所成的角为 $60°$.

课本例 2

变式　如图，取 AA_1 的中点 P，连接 PB，则 $PN \underline{\mathbin{/\!/}} AD \underline{\mathbin{/\!/}} BC$.



∴四边形 $BCNP$ 为平行四边形. $\therefore PB\parallel CN$.

设 $PB\cap MB_1=E$，则 $\angle BEM$ 或其补角即为异面直线 CN 与 B_1M 所成的角.

由 $\triangle APB\cong\triangle BMB_1$ 可知 $\angle PBA=\angle MB_1B$.

$\because \angle BB_1M+\angle BMB_1=90°$，

$\therefore \angle PBM+\angle BMB_1=90°$.

$\therefore \angle MEB=90°$，

即 B_1M 与 PB 所成的角为 $90°$.

∴异面直线 B_1M 与 CN 垂直.

第 14 课时　直线与平面垂直(1)

例　(1)B　**解析**：一条直线和三角形的两边同时垂直，则其垂直于三角形所在平面，从而垂直于第三边.

(2)D　**解析**：a 与 b 垂直，$b\perp$ 平面 α，则 $a\subset\alpha$ 或 $a\parallel\alpha$.

变式 1　如图，连接 OB.

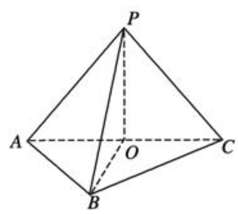
在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，

$\because O$ 为 AC 的中点，

$\therefore OA=OB=OC$.

又 $\because PA=PB=PC$，

$\therefore \triangle POA\cong\triangle POB\cong\triangle POC$.



$\therefore \angle POA=\angle POB=\angle POC$.

$\because \angle POA+\angle POC=180°$，

$\therefore \angle POA=\angle POB=\angle POC=90°$.

$\therefore PO\perp OA$，$PO\perp OB$.

又 $\because OA$，$OB\subset$ 平面 ABC，且 $AO\cap BO=O$，

$\therefore PO\perp$ 平面 ABC.

变式 2　由变式 1 可知 $PO\perp$ 平面 ABC，即 $PO\perp BO$.

$\because AB=BC$，O 为斜边 AC 的中点，$\therefore BO\perp AC$.

$\because PO$，$AC\subset$ 平面 PAC，且 $PO\cap AC=O$，

$\therefore BO\perp$ 平面 PAC.

变式 3　$\because PO\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore PO\perp BC$，$PO\perp AC$.

又 $\because PA\perp BC$，$PA\cap PO=P$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAO.

又 $\because OA\subset$ 平面 PAO，$\therefore BC\perp OA$.

同理可证 $AB\perp OC$. ∴点 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

$\therefore OB\perp AC$.

又 $\because PO\cap OB=O$，PO，$OB\subset$ 平面 PBO，

$\therefore AC\perp$ 平面 PBO.

课本例 4

变式 1　$\because AB\perp$ 平面 AA_1D_1D，

$\therefore \angle AA_1B$ 就是 A_1B 与平面 AA_1D_1D 所成的角.

在 $Rt\triangle AA_1B$ 中，$\angle BAA_1=90°$，$AB=AA_1$，

$\therefore \angle AA_1B=45°$.

$\therefore A_1B$ 与平面 AA_1D_1D 所成的角是 $45°$.

变式 2　$\because PA\perp$ 平面 ABC，

$\therefore \angle PEA$ 为 PE 与平面 ABC 所成的角.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AC=2$，

$\therefore BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle ACB=30°$.

$\because PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$.

又 $\because PE\perp BC$，$PE\cap PA=P$，PE，$PA\subset$ 平面 PAE，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAE. $\therefore AE\perp BC$.

在 $Rt\triangle AEC$ 中，$AC=2$，$\angle ACB=30°$，$\therefore AE=1$.

在 $Rt\triangle PAE$ 中，$AE=1$，$PA=\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle PEA=\sqrt{3}$. $\therefore \angle PEA=60°$.

故 PE 与平面 ABC 所成的角为 $60°$.

第 15 课时　直线与平面垂直(2)

例　$\because PA\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，$\therefore PA\perp l$. 同理 $PB\perp l$.

$\because PA\cap PB=P$，$\therefore l\perp$ 平面 PAB.

$\because PA\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$\therefore PA\perp a$.

$\because a\perp AB$，$PA\cap AB=A$，

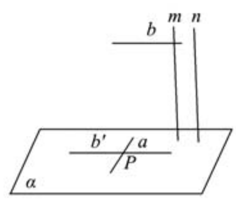
$\therefore a\perp$ 平面 PAB. $\therefore a\parallel l$.

变式 1　如图，过 a 上任意一点 P 作 $b'\parallel b$，得到相交直线 a，b'.

设 a 与 b' 所确定的平面为 α.

$\because m\perp b$，$b'\parallel b$，$\therefore m\perp b'$.

又 $m\perp a$ 且 a，b' 是 α 内的两条相交直线，



$\therefore m\perp\alpha$. 同理 $n\perp\alpha$.

$\therefore m\parallel n$.

变式 2　如图所示，连接 AB_1，B_1D_1，B_1C，BD.

$\because DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore DD_1\perp AC$.

又 $AC\perp BD$，

$\therefore AC\perp$ 平面 BDD_1B_1.

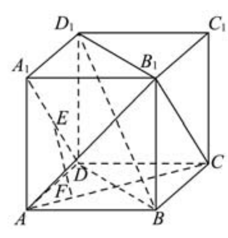
又 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，

$\therefore AC\perp BD_1$.

同理可证 $BD_1\perp B_1C$.

$\therefore BD_1\perp$ 平面 AB_1C.

$\because EF\perp A_1D$，$A_1D\parallel B_1C$，



A版

（必修第二册）

高中数学

例题变式

训练

责任编辑　王贵男

装帧设计　王其宝

　　　　　刘羽珂

ISBN 978-7-5333-3995-1

9 787533 339951 >

定价：23.00元