



第一部分

初中学业水平考试数学说明

一、命题原则

1. 考查内容依据《数学课程标准》，体现基础性

命题突出对学生基本数学素养的评价。试题首先关注《数学课程标准》中最基础和最核心的内容，即所有学生在学习数学和应用数学解决问题过程中最为重要的、必须掌握的核心观念、思想方法、基本概念和常用的技能。所有试题求解过程中所涉及的知识与技能以《数学课程标准》为依据，不扩展范围与提高要求。

2. 试题素材、求解方式等体现公平性

数学学业水平考试的内容、试题素材和试卷形式对每一位学生是公平的。试题不需要特殊背景知识才能够理解。对于具有特殊才能和需要特殊帮助的学生，命题允许学生用各自的数学认知特征、已有的数学活动经验，来表达自己的数学才能。制订评分标准系统时，以开放的态度对待合理的、但没有预见到的答案形式，尊重不同的解答方法和表述方法。

3. 试题背景具有现实性

试题背景来自于学生所能理解的生活现实，符合学业所具有的数学现实和其他学科现实。应用性问题的题材具有鲜明的时代特征，能够在学生的生活中找到原型。

4. 试卷具备有效性

数学学业水平考试试卷应当有效地反映学生的数学学习状况，以下几点应当特别注意：

(1) 试卷形式以选择题、填空题、计算(求解)题、证明题、应用性问题、阅读分析题、探索性问题和开放性问题的主要题型。

(2) 试题的求解过程反映《数学课程标准》所倡导的数学活动方式，如观察、实验、猜测、验证、推理等，而不仅仅是记忆、模仿与熟练。

二、命题依据与考试内容

依据《数学课程标准》，结合考试性质与数学学科特点，初中数学学业水平考试试题将从学科知识、思想方法和学习潜能出发，由浅入深设置试题，不设审题障碍，注重“四基”，体现“四能”，多层次地考查学生的数学学科素养和理性思维。试题将继续加强开放性问题的研究，注重对学科内知识的综合应用与探究能力的考查(特别是思维能力)，具体体现在：

1. 重视考查学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用能力和创新意识。

(1) 让学生体验从具体情境中抽象出数学符号的过程，理解有理数、实数、代数式、方程、不等式、函数；掌握必要的运算(包括估算)技能；探索具体问题中的数量关系和变化规律；掌握用代数式、方程、不等式、函数进行表述的方法。

(2) 探索并掌握相交线、平行线、三角形、四边形和圆的基本性质与判定，掌握基本的证

明方法和基本的作图技能;探索并理解平面图形的平移、旋转、轴对称;认识投影与视图;探索并理解平面直角坐标系及其应用.

(3) 体验数据收集、处理、分析和推断过程,理解抽样方法,体验用样本估计总体的过程;进一步认识随机现象,能计算一些简单事件的概率.

(4) 通过用代数式、方程、不等式、函数等表述数量关系的过程,体会模型的思想,建立符号意识,在研究图形性质和运动、确定物体位置等过程中,进一步发展空间观念,经历借助图形思考问题的过程,初步建立几何直观.

(5) 了解利用数据可以进行统计推断,发展建立数据分析观念,感受随机现象的特点.

(6) 体会通过合情推理探索数学结论、运用演绎推理加以证明的过程,在多种形式的数学学习活动中,发展合情推理和演绎推理的能力.

(7) 能独立思考,体会数学的基本思想和思维方式.

(8) 初步学会在具体的情境中从数学的角度发现问题和提出问题,并综合运用数学知识和方法等解决简单的实际问题,增强应用意识,提高实践能力.

(9) 经历从不同角度寻求分析问题和解决问题的方法的过程,体验解决问题方法的多样性,掌握分析问题和解决问题的一些基本方法.

(10) 通过适当的数学探究活动,考查学生对数学学习的好奇心、克服困难的勇气及质疑、创新、独立思考等学习品质.

2. 坚持能力立意,注重考查学生数学方面的学科核心素养.

(1) 数学运算:指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的过程.主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算方向,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果等.数学运算是数学活动的基本形式,也是演绎推理的一种形式,是得到数学结果的重要手段.在数学运算核心素养的形成过程中,学生能够进一步发展数学运算能力,能有效借助运算方法解决实际问题,促进数学思维发展,养成程序化思考问题的好习惯,形成一丝不苟、严谨求实的科学精神.试题将通过设置实数、二次根式、方程(组)、不等式(组)、函数、统计、概率及几何计算等问题,考查学生是否能够根据数学通性通法进行正确的推理与运算,适当控制计算量和淡化计算技巧,强调运算速度和准确性.

(2) 数学抽象:指舍去事物的一切物理属性,得到数学研究对象的思维过程.主要包括:从数量与数量关系,图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系,从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,并且用数学符号或者数学术语予以表征.数学抽象是数学的基本思想,是形成理性思维的重要基础,反映了数学的本质特征,贯穿在数学的产生、发展、应用的过程中.数学抽象使得数学成为高度概括、表达准确、结论一般、有序多级的系统.在数学抽象核心素养的形成过程中,积累从具体到抽象的活动经验.学生能更好地理解数学概念、命题、方法和体系.能通过抽象、概括去认识、理解、把握事物的数学本质,能逐渐养成一般性思考问题的习惯,能在其他学科的学习中主动运用数学抽象的思维方式解决问题.试题将通过设置生活情境、生产实践中的数学问题和对数量关系、图形关系等问题的探索与研究,考查学生由特殊到一般、化抽象为具体等数学抽象的思维过程和数学理解、理性思维与探究能力,体会数学的学科价值.适当注意控制阅读量和体现问题情境的公平性.

(3) 数学建模:是对现实问题进行数学抽象,用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程.主要包括:在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题,分析

问题、构建模型,求解结论,验证结果并改进模型,最终解决实际问题.数学模型构建了数学与外部世界的桥梁,是数学应用的重要形式.它是应用数学解决实际问题的基本手段,也是推动数学发展的动力.在数学建模核心素养的形成过程中,积累用数学解决实际问题的经验.学生能够在实际情境中发现和提出问题;能够针对问题建立数学模型;能够运用数学知识求解模型,并尝试基于现实背景验证模型和完整模型;能够提升应用能力,增强创新意识.试题将通过设置问题情境和生活中的实际问题,让学生经历从现实生活或具体情境中抽象出数学问题的过程,考查学生用数学符号建立方程(组)、不等式(组)、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律、求出结果并讨论结果的意义等.通过双基整合、数学建模、实践操作、探究开放、综合应用等多种途径,让学生经历“做数学”和“用数学”的过程,考查学生利用数学的概念、原理和方法,解释现实世界中的现象、解决现实世界中的问题.将现实生活中与数量和图形有关的问题抽象成数学问题,运用所学数学知识和思想去发现、提出、分析、解决数学问题.

(4) 逻辑推理:指从一些事实和命题出发,依据逻辑推出一个命题的思维过程.主要包括两类:一类是从特殊到一般的推理,推理形式主要有归纳、类比;一类是从一般到特殊的推理,推理形式主要有演绎.逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式,是数学严谨性的基本保证,是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质.在逻辑推理核心素养的形成过程中,学生能够发现问题和提出命题;能掌握推理的基本形式,表述论证的过程;能理解数学知识之间的联系,建构知识框架;形成有论据、有条理、合乎逻辑的思维品质,增强数学交流能力.

(5) 直观想象:指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用图形理解和解决数学问题的过程.主要包括:借助空间认识事物的位置关系、形态变化与运动规律;利用图形描述、分析数学问题,建立形与数的联系;构建数学问题的直观模型,探索解决问题的思路.直观想象是发现和提出数学问题、分析和解决数学问题的重要手段,是探索和形成论证思路、进行逻辑推理、构建抽象结构的思维基础.在直观想象核心素养的形成过程中,学生能够进一步发展几何直观和空间想象能力,增强运用图形和空间想象思考问题的意识.

(6) 数据分析:指针对研究对象获得相关数据,运用统计方法对数据中的有用信息进行分析 and 推断,形成知识的过程.主要包括:收集数据,整理数据,提取信息,构建模型对信息进行分析、推断,获得结论.在数据分析核心素养的形成过程中,学生能够提升数据处理的能力,增强基于数据表达现实问题的意识,养成通过数据思考问题的习惯,积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验.试题将通过设置现实生活情境和图表信息问题,让学生经历收集、整理、分析、处理数据的过程,进一步体会学数学、用数学的思想,并作出判断,选择合适的方法,发现数据规律,解决数学实际问题.

3. 重视数学思想方法和核心内容中的重点考查,关注学生的发展.

(1) 坚持“低起点,缓坡度,翘尾巴”的设计思路,力求体现出“重视基础、关注思想、加强应用、发展能力”的特征.

(2) 突出对初中数学核心知识内容的考查.初中数学的核心知识内容是学生今后进一步学习的基础.试题要在注意内容覆盖的基础上,突出对数与式、方程与不等式、函数、基本图形的性质、图形间基本关系、统计与概率等核心知识内容的考查.引导教师重视教材,克服以练代教、盲目练的弊端.

三、考试形式与分值

考试采用闭卷、笔试形式,统一使用答题纸,利用网上阅卷.试题分为客观题和主观题两部分,共有 25 题,满分 120 分.

四、试卷结构与赋分比例

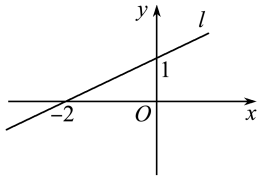
试卷分为卷 I 和卷 II. 卷 I 有 12 道选择题,满分 36 分,占总分的 30%,全部为四选一型选择题. 卷 II 有 13 道非选择题;其中有 6 道填空题,满分 24 分,占总分的 20%;有 7 道解答题,满分 60 分,占总分的 50%. 填空题只要求填写最终结果,解答题要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

五、题型示例

1. 选择题

【例 1】 (2018, 第 5 题) 如图, 直线 l 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象, 如果点 $A(3, m)$ 在直线 l 上, 则 m 的值是()

- A. -5
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$
D. 7



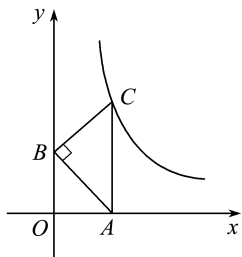
解析: 由图形知, 直线 $y=kx+b$ 过点 $(-2, 0)$, $(0, 1)$, 易求得直线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$

1, 将 $x=3$ 代入可得 $m=\frac{5}{2}$, 选 C.

说明: 本题考查直线上点的坐标特征, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求一次函数的解析式.

【例 2】 (2019, 第 9 题) 如图, 在平面直角坐标系中, 等腰直角三角形 ABC 的顶点 A, B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上, $\angle ABC=90^\circ$, $CA \perp x$ 轴, 点 C 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上. 若 $AB=1$, 则 k 的值为()

- A. 1
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2}$
D. 2



解析: \because 等腰直角三角形 ABC 的顶点 A, B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上, $\angle ABC=90^\circ$, $CA \perp x$ 轴, $AB=1$, $\therefore \angle BAC = \angle BAO = 45^\circ$. $\therefore OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \sqrt{2}$. \therefore 点 C 的坐标为

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. \because 点 C 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上, $\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$. 故选 A.

说明:本题考查反比例函数图象上点的坐标特征、等腰直角三角形的性质,解题的关键是明确题意,正确利用数形结合的思想.

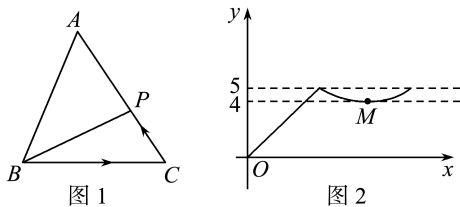
2. 填空题

【例 3】 (2019, 第 14 题) 已知关于 x 的方程 $ax^2 + 2x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是_____.

解析:由关于 x 的方程 $ax^2 + 2x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 得 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 \times 3a > 0$, 解得 $a > -\frac{1}{3}$, 则 $a > -\frac{1}{3}$ 且 $a \neq 0$, 故答案为 $a > -\frac{1}{3}$ 且 $a \neq 0$.

说明:本题重点考查了一元二次方程根的判别式, 在一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 中: (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

【例 4】 (2018, 第 17 题) 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B 出发, 沿 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 匀速运动到点 A , 图 2 是点 P 运动时, 线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中 M 为曲线部分的最低点, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.



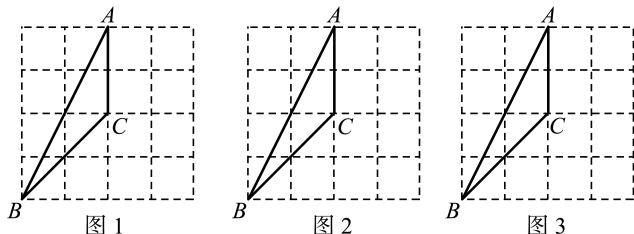
解析:根据图象可知点 P 在 BC 上运动时, 此时 BP 不断增大, 点 P 从 B 向 C 运动时, BP 的最大值为 5, 即 $BC = 5$. $\because M$ 是曲线部分的最低点, \therefore 此时 BP 最小, 即 $BP \perp AC$, $BP = 4$. \therefore 由勾股定理可知 $PC = 3$. \because 图象的曲线部分是轴对称图形, $\therefore PA = 3$. $\therefore AC = 6$. $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$. 故答案为: 12.

说明:本题考查动点问题的函数图象, 解题的关键是注意结合图象求出 BC 与 AC 的长度, 本题属于中等题型.

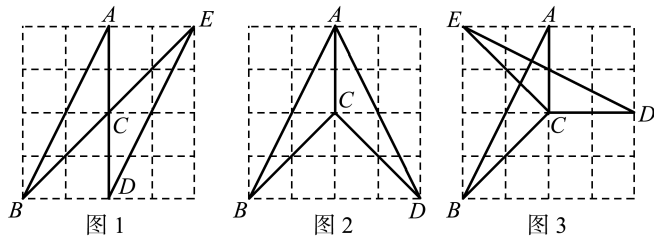
3. 解答题

【例 5】 (2018, 第 20 题) 如图, 在 4×4 的方格纸中, $\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上.

- (1) 在图 1 中, 画出一个与 $\triangle ABC$ 成中心对称的格点三角形;
- (2) 在图 2 中, 画出一个与 $\triangle ABC$ 成轴对称且与 $\triangle ABC$ 有公共边的格点三角形;
- (3) 在图 3 中, 画出 $\triangle ABC$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转 90° 后的三角形.



解析:(1) 如下图 1 所示, $\triangle DCE$ 为所求作; (2) 如下图 2 所示, $\triangle ACD$ 为所求作; (3) 如下图 3 所示, $\triangle ECD$ 为所求作.



说明:本题考查图形变换,解题的关键是正确理解图形变换的性质,本题属于基础题型.

【例 6】 (2019,第 22 题)4 月 23 日是世界读书日,习近平总书记说:“读书可以让人保持思想活力,让人得到智慧启发,让人滋养浩然之气。”某校响应号召,鼓励师生利用课余时间广泛阅读,该校文学社为了解学生课外阅读情况,抽样调查了部分学生每周用于课外阅读的时间,过程如下:

一、数据收集,从全校随机抽取 20 名学生,进行每周用于课外阅读时间的调查,数据如下(单位:min):

30	60	81	50	44	110	130	146	80	100
60	80	120	140	75	81	10	30	81	92

二、整理数据,按如下分段整理样本数据并补全表格:

课外阅读时间 x (min)	$0 \leq x < 40$	$40 \leq x < 80$	$80 \leq x < 120$	$120 \leq x < 160$
等级	D	C	B	A
人数	3	a	8	b

三、分析数据,补全下列表格中的统计量:

平均数	中位数	众数
80	c	81

四、得出结论:

- ① 表格中的数据: $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$;
- ② 用样本中的统计量估计该校学生每周用于课外阅读时间的等级为 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- ③ 如果该校现有学生 400 人,估计等级为“B”的学生有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人;
- ④ 假设平均阅读一本课外书的时间为 320 分钟,请你用样本平均数估计该校学生每人一年(按 52 周计算)平均阅读 $\underline{\hspace{2cm}}$ 本课外书.

解析:① 由已知数据知 $a = 5, b = 4$.

∵ 第 10, 11 个数据分别为 80, 81,

∴ 中位数 $c = \frac{80+81}{2} = 80.5$.

故答案为:5, 4, 80.5.

② 用样本中的统计量估计该校学生每周用于课外阅读时间的等级为 B, 故答案为: B.

③ 估计等级为“B”的学生有 $400 \times \frac{8}{20} = 160$ (人), 故答案为: 160.

④ 估计该校学生每人一年(按 52 周计算)平均阅读课外书 $\frac{80}{320} \times 52 = 13$ (本), 故答案为: 13.

说明: 本题主要考查数据的统计和分析的知识. 解题的关键是准确把握三数(平均数、中位数、众数), 正确理解样本和总体的关系.

【例 7】 (2019, 第 24 题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D .

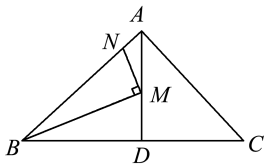


图 1

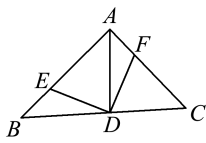


图 2

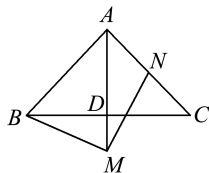


图 3

(1) 如图 1, 点 M, N 分别在 AD, AB 上, 且 $\angle BMN = 90^\circ$, 当 $\angle AMN = 30^\circ$, $AB = 2$ 时, 求线段 AM 的长;

(2) 如图 2, 点 E, F 分别在 AB, AC 上, 且 $\angle EDF = 90^\circ$, 求证: $BE = AF$;

(3) 如图 3, 点 M 在 AD 的延长线上, 点 N 在 AC 上, 且 $\angle BMN = 90^\circ$, 求证: $AB + AN = \sqrt{2}AM$.

解: (1) $\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, AD \perp BC$,

$\therefore AD = BD = DC, \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ, \angle BAD = \angle CAD = 45^\circ$.

$\because AB = 2, \therefore AD = BD = DC = \sqrt{2}$.

$\because \angle AMN = 30^\circ, \therefore \angle BMD = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$\therefore \angle MBD = 30^\circ. \therefore BM = 2DM$.

由勾股定理得, $BM^2 - DM^2 = BD^2$, 即 $(2DM)^2 - DM^2 = (\sqrt{2})^2$,

解得, $DM = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore AM = AD - DM = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 证明: $\because AD \perp BC, \angle EDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDE = \angle ADF$.

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle DAF, \\ DB = DA, \\ \angle BDE = \angle ADF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF$.

$\therefore BE = AF$.

(3) 证明: 过点 M 作 $ME \parallel BC$ 交 AB 的延长线于点 E ,

$\therefore \angle AME = 90^\circ$.

$\therefore AE = \sqrt{2}AM, \angle E = 45^\circ$.

$\therefore ME = MA$.

$\because \angle AME = 90^\circ, \angle BMN = 90^\circ,$

$\therefore \angle BME = \angle AMN.$

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle AMN$ 中,

$$\begin{cases} \angle E = \angle MAN, \\ ME = MA, \\ \angle BME = \angle AMN, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BME \cong \triangle AMN.$

$\therefore BE = AN.$

$\therefore AB + AN = AB + BE = AE = \sqrt{2}AM.$

说明: 本题考查的是等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质、直角三角形的性质, 掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

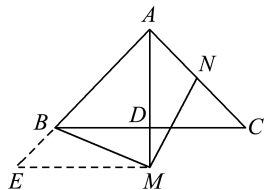


图3

【例8】 (2018, 第25题) 如图1, 已知二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B, C , 点 C 的坐标为 $(8, 0)$, 连接 AB, AC .

(1) 请直接写出二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的表达式;

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(3) 若点 N 在 x 轴上运动, 当以 A, N, C 为顶点的三角形是等腰三角形时, 请写出此时点 N 的坐标;

(4) 如图2, 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B, C 重合), 过点 N 作 $NM \parallel AC$, 交 AB 于点 M , 当 $\triangle AMN$ 的面积最大时, 求此时点 N 的坐标.

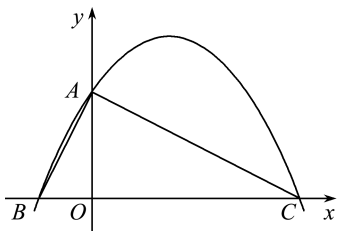


图1

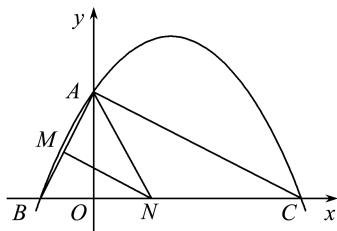


图2

解: (1) \because 二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B, C , 点 C 的坐标为 $(8, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} c = 4, \\ 64a + 12 + c = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4}, \\ c = 4. \end{cases}$$

\therefore 二次函数的表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明: 令 $y = 0$, 则 $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0$,

解得 $x_1 = 8, x_2 = -2$.

\therefore 点 B 的坐标为 $(-2, 0)$.

由已知可得,

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中, } AB^2 = BO^2 + AO^2 = 4 + 16 = 20;$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } AC^2 = AO^2 + CO^2 = 16 + 64 = 80.$$

$$\text{又} \because BC = OB + OC = 2 + 8 = 10,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB^2 + AC^2 = 20 + 80 = 10^2 = BC^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

$$(3) \because A(0,4), C(8,0),$$

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

① 以 A 为圆心、 AC 长为半径作圆, 交 x 轴于点 N , 此时点 N 的坐标为 $(-8, 0)$;

② 以 C 为圆心、 AC 长为半径作圆, 交 x 轴于点 N , 此时点 N 的坐标为 $(8 - 4\sqrt{5}, 0)$ 或 $(8 + 4\sqrt{5}, 0)$;

③ 作 AC 的垂直平分线, 交 x 轴于点 N , 此时点 N 的坐标为 $(3, 0)$.

综上, 若点 N 在 x 轴上运动, 当以 A, N, C 为顶点的三角形是等腰三角形时, 点 N 的坐标分别为 $(-8, 0), (8 - 4\sqrt{5}, 0), (3, 0), (8 + 4\sqrt{5}, 0)$.

(4) 如图, 设点 N 的坐标为 $(n, 0)$, 则 $BN = n + 2$. 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D ,

$$\therefore MD \parallel OA.$$

$$\therefore \triangle BMD \sim \triangle BAO.$$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{MD}{OA}.$$

$$\because MN \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}.$$

$$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{BN}{BC}.$$

$$\because OA = 4, BC = 10, BN = n + 2,$$

$$\therefore MD = \frac{2}{5}(n + 2).$$

$$\because S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABN} - S_{\triangle BMN}$$

$$= \frac{1}{2}BN \cdot OA - \frac{1}{2}BN \cdot MD$$

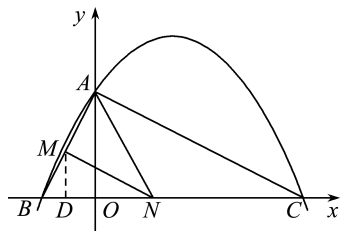
$$= \frac{1}{2}(n + 2) \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}(n + 2)^2$$

$$= -\frac{1}{5}(n - 3)^2 + 5,$$

\therefore 当 $n = 3$ 时, $S_{\triangle AMN}$ 最大.

\therefore 点 N 的坐标为 $(3, 0)$.

\therefore 当 $\triangle AMN$ 的面积最大时, 点 N 的坐标为 $(3, 0)$.



说明: 本题考查二次函数的综合应用, 解(1)的关键是会用待定系数法求解析式, 解(2)的关键是熟练掌握勾股定理和逆定理, 解(3)的关键是正确利用等腰三角形的性质, 解(4)的关键是熟知三角形相似的判定和性质以及函数的最值等.

第二部分 教材梳理

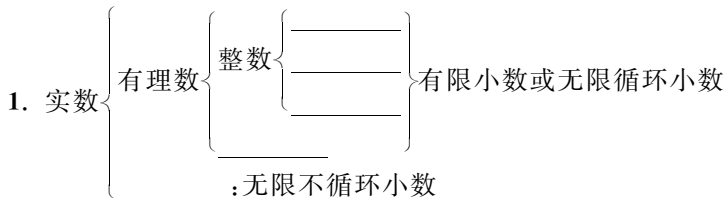
第一单元 数与式

第一讲 实数

★ 考试要求

1. 明确实数的有关概念:有理数、无理数、数轴、互为相反数、倒数、绝对值、平方根、立方根.
2. 能够正确理解实数的分类,并进行实数的大小比较.
3. 会运用运算规律,按照规定的运算法则进行实数的加、减、乘、除、乘方、开方混合运算.
4. 了解近似数,会用科学记数法表示较大或较小的数.

★ 知识梳理



2. 规定了_____、_____、_____的直线叫做数轴,实数与数轴上的点具有_____的关系.
3. 实数 a, b 互为相反数,则 $a+b=$ _____ ;实数 a, b 互为倒数,则 $a \cdot b=$ _____ .
4. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$
5. 设 a 为实数,则 $|a|$ _____ $0, a^2$ _____ $0, \sqrt{a}$ _____ $0 (a \geq 0)$.
6. 一般地,一个数可以表示成 $a \times$ _____ 的形式,其中对 a 的要求是_____, n 是整数,这种记数方法叫做科学记数法. 一个近似数四舍五入到哪一位,就说这个近似数精确到哪一位.
7. $a^0 =$ _____, $a^{-p} =$ _____ ($a \neq 0$).

★ 典例分析

【例 1】 下列计算错误的是()

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

B. $3^2 \times 3^{-1}=3$

C. $2^0 \div 2^{-2}=\frac{1}{6}$

D. $(-3 \times 10^2)^3=-2.7 \times 10^7$

点拨:正数的算术平方根为正数;0的算术平方根为0;负数的偶次方为正数,奇次方为负数;任何不等于0的数的负指数幂都等于这个数的正指数幂的倒数;任何不等于0的数的0次方都为1.

方法总结:正确理解算术平方根、绝对值、零指数幂、负指数幂的相关概念是解此类问题的关键.

【例2】 (19·陕西)已知实数 $-\frac{1}{2}, 0.16, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{25}, \sqrt[3]{4}$,其中为无理数的是_____.

方法总结:无理数常见的三种类型:(1)开不尽的方根,如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等;(2)特定结构的无限不循环小数,如1.202 002 000 200 002... (两个2之间依次多一个0);(3)含有 π 的数,如 2π .

另外要注意:判断一个数是不是无理数,不能只看形式,要看化简结果,如 $\sqrt[3]{8}$ 是有理数而不是无理数.

【例3】 (19·恩施州)天文单位是天文学中计量天体之间距离的一种单位,其数值取地球与太阳之间的平均距离,即149 597 870 700 m,约为149 600 000 km.将数149 600 000用科学记数法表示为()

A. 14.96×10^7

B. 1.496×10^7

C. 14.96×10^8

D. 1.496×10^8

点拨:科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式,其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.确定 n 的值,要看把原数变为 a 时,小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同,当原数的绝对值大于1时, n 为正数;当原数的绝对值小于1时, n 为负数.



强化训练

1. (18·武汉)温度由 -4°C 上升 7°C 是()

A. 3°C

B. -3°C

C. 11°C

D. -11°C

2. $\sqrt{16}$ 的算术平方根的倒数是()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\pm \frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\pm \frac{1}{2}$

3. (18·重庆)下列命题是真命题的是()

A. 如果一个数的相反数等于这个数本身,那么这个数一定是0

B. 如果一个数的倒数等于这个数本身,那么这个数一定是1

C. 如果一个数的平方等于这个数本身,那么这个数一定是0

D. 如果一个数的算术平方根等于这个数本身,那么这个数一定是0

4. 2019年某市固定资产投资计划为2 580亿元,将2 580亿用科学记数法表示为()

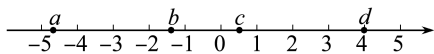
A. 2.58×10^{11}

B. 2.58×10^{12}

C. 2.58×10^{13}

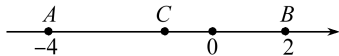
D. 2.58×10^{14}

5. 实数 a, b, c, d 在数轴上的对应点的位置如图所示, 则正确的结论是()



- A. $a > -4$ B. $bd > 0$ C. $|a| > |b|$ D. $b + c > 0$

6. (19·福建) 如图, 数轴上 A, B 两点所表示的数分别是 -4 和 2 , C 是线段 AB 的中点, 则点 C 所表示的数是()



- A. -3 B. -2 C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

7. (19·眉山) 下列四个数中, 是负数的是()

- A. $|-3|$ B. $-(-3)$ C. $(-3)^2$ D. $-\sqrt{3}$

8. 点 A, B, C 在同一条数轴上, 其中 A, B 表示的数分别为 $-3, 1$. 若 $BC = 2$, 则 AC 等于()

- A. 3 B. 2 C. 3 或 5 D. 2 或 6

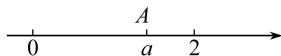
9. (18·铜仁) 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9\ 900}$ 的值为()

- A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{99}{100}$ C. $\frac{1}{99}$ D. $\frac{100}{99}$

10. (18·莱芜) 无理数 $2\sqrt{11} - 3$ 在()

- A. 2 和 3 之间 B. 3 和 4 之间 C. 4 和 5 之间 D. 5 和 6 之间

11. (18·广州) 如图, 数轴上点 A 表示的数为 a , 化简: $a + \sqrt{a^2 - 4a + 4} =$ _____.



12. (18·凉山州) 已知一个正数的平方根是 $3x - 2$ 和 $5x + 6$, 则这个数是 _____.

13. 若 a 与 b 互为相反数, c 与 d 互为倒数, e 的绝对值是 $2\ 020$, 求 $(cd + e)^{a+b}$ 的值.

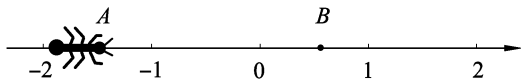
14. 计算:

(1) 计算: $-2^2 + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$;

(2) 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (2\ 019 - \pi)^0 + \sqrt{(-3)^2} - |-2|$;

(3) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} + 2\cos 30^\circ - |\sqrt{3}-1| + (-1)^{2021}$.

15. 如图,一只蚂蚁由点 A 沿数轴向右爬 2 个单位长度到达点 B,点 A 表示 $-\sqrt{2}$,设点 B 所表示的数为 m .



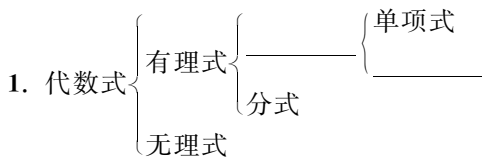
- (1) 求 m 的值;
- (2) 求 $|m-1| + (m+2020)^0$ 的值.

第二讲 整式与因式分解

★ 考试要求

1. 了解单项式、多项式、整式的概念,弄清它们与代数式之间的联系和区别.
2. 理解同类项的概念,掌握合并同类项的法则和去、添括号的法则.
3. 掌握幂的运算、整式的乘除、平方差公式和完全平方公式.
4. 能准确地进行整式的加、减、乘、除、乘方混合运算.
5. 会根据多项式的结构特征,灵活选择合适的方法进行因式分解.
6. 利用因式分解的方法进行整式的化简和求值.

★ 知识梳理



(1) 单项式:表示_____与_____乘积的代数式称为单项式. 单独一个数或一个字母也是单项式,如 $a, 5$.

(2) 多项式:几个_____的和叫做多项式. 其中,每个单项式叫做多项式的_____,不含字母的项叫做_____.

2. 同类项——必须同时具备的两个条件(缺一不可):

(1) 所含的_____相同;(2) 相同_____也相同.

合并同类项,就是把多项式中的同类项合并成一项.

方法:把同类项的_____相加,而_____不变.

3. 去括号法则

法则 1:括号前面是“+”号,把括号和它前面的“+”号去掉,原括号里各项符号都_____;

法则 2:括号前面是“-”号,把括号和它前面的“-”号去掉,原括号里各项符号都_____.

4. 整式的加减

整式的加减的过程就是_____.如遇到括号,则先_____,再_____,合并到_____为止.

5. 幂的运算

(1) $a^m a^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (m, n 都是正整数). (2) $(a^m)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (m, n 都是正整数).

(3) $(ab)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 是正整数). (4) $a^m \div a^n = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a \neq 0, m, n$ 都是正整数).

(5) $a^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a \neq 0$). (6) $a^{-p} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a \neq 0, p$ 是正整数).

6. 整式的乘法(用字母表示)

(1) 单项式与多项式相乘:_____.

(2) 多项式与多项式相乘:_____.

7. 乘法公式

(1) 平方差公式: $(a+b)(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 完全平方公式: $(a \pm b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 把一个多项式化成几个_____的_____的形式,叫做把这个多项式分解因式. 分解因式与整式乘法的关系:

$$\text{多项式} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{整式的积}$$

9. 二次三项式的因式分解: $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

10. 因式分解一般步骤为“一提”“二套”“三分组”. 分解因式要分解到_____为止.



典例分析

【例 1】 (19·常德)若 $x^2 + x = 1$, 则 $3x^4 + 3x^3 + 3x + 1$ 的值为_____.

点拨: 将 $x^2 + x$ 看作一个整体,把 $3x^4 + 3x^3 + 3x + 1$ 变形为 $3x^2(x^2 + x) + 3x + 1$, 代入数值再变形计算即可.

方法总结: 代数式求值的一般方法:

(1) 直接代入法:把字母所表示的数值直接代入,计算求值.

(2) 整体代入法:① 观察已知条件和所求代数式;② 通过因式分解、提公因式等,将所求代数式变形,使其与已知代数式成倍数关系;③ 把已知代数式看成一个整体代入求值.

(3) 当字母的取值不明确时,需将字母的值化简或求解出来,再代入代数式解题.

【例 2】 (19·绵阳)已知 $4^m = a, 8^n = b$, 其中 m, n 为正整数,则 $2^{2m+6n} = (\quad)$

A. ab^2

B. $a+b^2$

C. a^2b^3

D. a^2+b^3

点拨:先逆用幂的乘方的性质转化为以2为底数的幂相乘,再利用同底数幂的乘法的性质计算,最后根据指数相等列出方程求解即可.

【例3】 分解因式: $-3ax^2+6axy-3ay^2=$ _____.

方法总结:因式分解的一般方法:提公因式法和公式法.一般来说,首先观察有没有公因式,提取公因式后,再考虑能否用公式.当项数比较多而又无公因式时,可考虑先分组再进行因式分解.

【例4】 (19·凉山州)先化简,再求值: $(a+3)^2-(a+1)(a-1)-2(2a+4)$,其中 $a=-\frac{1}{2}$.

点拨:先运用平方差、完全平方公式化简式子,然后把 a 的值代入化简后的结果中求值.

尝试解答

方法总结:代数式的化简求值问题难度较小,但容易出错,需要具有较好的数与式的运算能力,特别是乘法公式的运用,值得注意.



强化训练

1. (19·眉山)下列运算正确的是()

A. $2x^2y+3xy=5x^3y^2$

B. $(-2ab^2)^3=-6a^3b^6$

C. $(3a+b)^2=9a^2+b^2$

D. $(3a+b)(3a-b)=9a^2-b^2$

2. (19·潍坊)下列因式分解正确的是()

A. $3ax^2-6ax=3(ax^2-2ax)$

B. $x^2+y^2=(-x+y)(-x-y)$

C. $a^2+2ab-4b^2=(a+2b)^2$

D. $-ax^2+2ax-a=-a(x-1)^2$

3. 某市今年2月份鸡的价格比1月份下降 $a\%$,3月份比2月份下降 $b\%$,已知1月份鸡的价格为24元/千克.设3月份鸡的价格为 m 元/千克,则()

A. $m=24(1-a\%-b\%)$

B. $m=24(1-a\%)b\%$

C. $m=24-a\%-b\%$

D. $m=24(1-a\%)(1-b\%)$

4. (18·河北)将 9.5^2 变形正确的是()

A. $9.5^2=9^2+0.5^2$

B. $9.5^2=(10+0.5)(10-0.5)$

C. $9.5^2=10^2-2\times 10\times 0.5+0.5^2$

D. $9.5^2=9^2+9\times 0.5+0.5^2$

5. (18·威海)已知 $5^x=3, 5^y=2$,则 $5^{2x-3y}=$ ()

A. $\frac{3}{4}$

B. 1

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{9}{8}$

6. (19·泸州)把 $2a^2-8$ 分解因式,结果正确的是()

A. $2(a^2-4)$

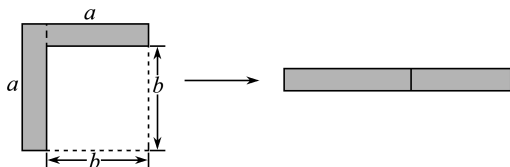
B. $2(a-2)^2$

C. $2(a+2)(a-2)$

D. $2(a+2)^2$

7. 如图,从边长为 a 的大正方形中剪掉一个边长为 b 的小正方形,将阴影部分沿虚线剪

开,拼成右边的矩形.根据图形的变化过程写出的一个正确的等式是()



A. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

B. $a(a-b) = a^2 - ab$

C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

D. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

8. 若 a 是整数,则 a^2 叫完全平方数.若自然数 x^2 是一个完全平方数,则下一个完全平方数是()

A. $x+1$

B. x^2+1

C. $x+2\sqrt{x}+1$

D. x^2+2x+1

9. 由 $m(a+b+c) = ma + mb + mc$, 可得 $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$, 即 $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$. 我们把该等式叫做多项式乘法的立方和公式. 把 b 换为 $-b$, 得到多项式乘法的立方差公式, 即 $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. 下列应用立方和公式和立方差公式进行的变形不正确的是()

A. $(x+4y)(x^2 - 4xy + 16y^2) = x^3 + 64y^3$

B. $(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - y^3$

C. $(a+1)(a^2 + a + 1) = a^3 + 1$

D. $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

10. (19·眉山) 分解因式: $3a^3 - 6a^2 + 3a = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. (19·广安) 因式分解: $3a^4 - 3b^4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (18·安顺) 若 $x^2 + 2(m-3)x + 16$ 是关于 x 的完全平方式, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (18·苏州) 若 $a+b=4, a-b=1$, 则 $(a+1)^2 - (b-1)^2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (19·兰州) 化简:

(1) $a(1-2a) + 2(a+1)(a-1)$;

(2) $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

16. 计算:

(1) 先化简, 再求值: $a(a-2b) - (a+b)(a-b)$, 其中 $a = \frac{1}{2}, b = -1$;

(2) 先化简,再求值: $(2a+1)^2-4a(a-1)$,其中 $a=\frac{1}{8}$.

17. 已知 $a+b=3, ab=2$,求 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值.

18. (18·河北)嘉淇准备完成题目:化简(\square) $x^2+6x+8)-(6x+5x^2+2)$ 时,发现系数“ \square ”印刷不清楚.

(1) 他把“ \square ”猜成 3,请你化简: $(3x^2+6x+8)-(6x+5x^2+2)$;

(2) 他妈妈说:“你猜错了,我看到该题标准答案的结果是常数.”通过计算说明原题中“ \square ”是几.

19. 观察下面分解因式的过程:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

用这种形式表示 $x \times x$, $x^2=x \cdot x$, $3x=x \cdot 2+x \cdot 1$, $2=1 \times 2$,

$$\text{故 } x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

x^2+5x+6 可表示为 $x \times x$, $x^2=x \cdot x$, $5x=x \cdot 2+x \cdot 3$, $6=2 \times 3$,
故 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

x^2-3x+2 可表示为 $x \times x$, $x^2=x \cdot x$, $-3x=x \cdot (-2)+x \cdot (-1)$, $2=(-1) \cdot (-2)$,
故 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

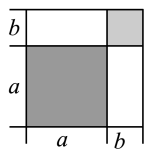
x^2-5x+6 可表示为 $x \times x$, $x^2=x \cdot x$, $-5x=x \cdot (-2)+x \cdot (-3)$, $6=(-2) \cdot (-3)$,
故 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

以上这种分解因式的方法叫做十字相乘法,请你用十字相乘法来分解以下多项式.

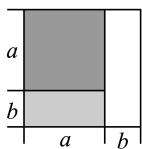
(1) x^2+6x+5 ;

(2) x^2-6x+8 .

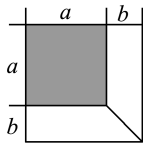
20. (18·衢州)有一张边长为 a 厘米的正方形桌面,因为实际需要,要将正方形边长增加 b 厘米,木工师傅设计了如图所示的三种方案:



方案一



方案二



方案三

小明发现这三种方案都能验证公式: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,

对于方案一,小明是这样验证的:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$$

请你根据方案二、方案三,写出公式的验证过程.

方案二:

方案三:

第三讲 分 式



考试要求

1. 了解分式的概念,能判断分式在什么情况下有意义、无意义、值为零.
2. 能熟练地进行分式的通分、约分及分式的混合运算.



知识梳理

1. 分式

(1) 若分式 $\frac{A}{B}$ 有意义,则_____.

(2) 若分式 $\frac{A}{B}$ 无意义,则_____.

(3) 若分式 $\frac{A}{B} = 0$,则_____.

2. 分式的基本性质:_____.

3. 分式的分子、分母及分式本身的符号中,若改变其中的两个,分式的值_____,即

$$\frac{a}{b} = \frac{(\quad)}{-b} = -\frac{a}{(\quad)} = -\frac{(\quad)}{b}.$$

4. 分式的运算:

$$\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 分式通分适用于分式的_____运算中,其关键是确定几个分式的_____ ;约分适用于分式的_____运算中,其关键是确定分子、分母的_____.



典例分析

【例 1】 (19·贵港)若分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值等于 0,则 x 的值为()

- A. $\neq 1$ B. 0 C. -1 D. 1

点拨:分式是指分母是含字母的整式且分母的值不为 0 的代数式.分式的值为 0 的条件:(1)分子=0;(2)分母 $\neq 0$.两个条件需同时具备,缺一不可.

【例 2】 (19·北京)如果 $m+n=1$,那么代数式 $(\frac{2m+n}{m^2-mn} + \frac{1}{m}) \cdot (m^2-n^2)$ 的值为()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

点拨:先将分式进行化简,得到一个最简代数式,再根据条件代入求值.

尝试解答

方法总结:掌握并灵活应用分式的基本性质,在通分和约分时,都要注意分解因式知识的应用.化简求值时,一要注意整体思想,二要注意解题技巧,三要注意代入的值要使分式有意义.

【例 3】 (19·通辽)先化简,再求值:

$\frac{1}{1-x} \div \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+2}$,请从不等式组 $\begin{cases} 5-2x \geq 1, \\ x+3 > 0 \end{cases}$ 的整数解中选择一个你喜欢的求值.

点拨:分式的化简求值,先根据分式混合运算的法则把原式进行化简,通过求不等式组的解集,选取合适的 x 的值代入,进行计算即可.

尝试解答

方法总结:本题考查的是分式的化简求值,在选取合适的 x 的值时要保证分式有意义.



强化训练

- 若代数式 $\frac{x}{x-4}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是()
 A. $x=0$ B. $x=4$ C. $x \neq 0$ D. $x \neq 4$
- (18· 莱芜) 若 x, y 的值均扩大为原来的 3 倍, 则下列分式的值保持不变的是()
 A. $\frac{2+x}{x-y}$ B. $\frac{2y}{x^2}$ C. $\frac{2y^3}{3x^2}$ D. $\frac{2y^2}{(x-y)^2}$
- 化简: $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$, 结果正确的是()
 A. 1 B. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ C. $\frac{x-y}{x+y}$ D. x^2+y^2
- (19· 扬州) 分式 $\frac{1}{3-x}$ 可变形为()
 A. $\frac{1}{3+x}$ B. $-\frac{1}{3+x}$ C. $\frac{1}{x-3}$ D. $-\frac{1}{x-3}$
- 下列计算错误的是()
 A. $\frac{0.2a+b}{0.7a-b} = \frac{2a+b}{7a-b}$ B. $\frac{x^3y^2}{x^2y^3} = \frac{x}{y}$ C. $\frac{a-b}{b-a} = -1$ D. $\frac{1}{c} + \frac{2}{c} = \frac{3}{c}$
- 若 $m^2 - mn = 0 (n \neq 0)$, 则 $\frac{2m}{m+n} =$ ()
 A. 0 B. 1 C. 0 或 1 D. 1 或 2
- (18· 南充) 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 则代数式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y}$ 的值是()
 A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{11}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
- 如果从一卷粗细均匀的电线上截取 1 m 长的电线, 称得它的质量为 a g, 再称得剩余电线的质量为 b g, 那么原来这卷电线的总长度是()
 A. $\frac{b+1}{a}$ m B. $(\frac{b}{a}+1)$ m C. $(\frac{a+b}{a}+1)$ m D. $(\frac{a}{b}+1)$ m
- (18· 孝感) 已知 $x+y=4\sqrt{3}, x-y=\sqrt{3}$, 则式子 $(x-y+\frac{4xy}{x-y})(x+y-\frac{4xy}{x+y})$ 的值是()
 A. 48 B. $12\sqrt{3}$ C. 16 D. 12
- 分式 $\frac{|x|-3}{x+3}$ 的值为零, 则 x 的值为_____.
- 若 $x+y=1$, 且 $x \neq 0$, 则 $(x+\frac{2xy+y^2}{x}) \div \frac{x+y}{x}$ 的值为_____.
- (18· 大庆) 已知 $\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, 则实数 $A =$ _____.
- (19· 辽阳) 先化简, 再求值: $(\frac{x^2-x}{x^2-2x+1} + \frac{2}{1-x}) \div \frac{x-2}{x^2-1}$, 其中 $x = 3\tan 30^\circ -$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{12}.$$

14. (19·本溪)先化简,再求值: $\left(\frac{a^2-4}{a^2-4a+4} - \frac{1}{2-a}\right) \div \frac{2}{a^2-2a}$, 其中 a 满足 $a^2+3a-2=0$.

15. (19·广元)先化简: $\left(\frac{3}{x-1} - x - 1\right) \cdot \frac{x-1}{x^2-4x+4}$, 再从 1, 2, 3 中选取一个适当的数代入求值.

16. (19·嘉兴)小明解答“先化简,再求值: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$, 其中 $x=\sqrt{3}+1$ ”的过程如图. 请指出解答过程中错误步骤的序号, 并写出正确的解答过程.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{x+1}(x^2-1) + \frac{2}{x^2-1}(x^2-1) \cdots \cdots \text{①} \\ &= (x+1) + 2 \cdots \cdots \text{②} \\ &= x+3 \cdots \cdots \text{③} \\ \text{当 } x &= \sqrt{3}+1 \text{ 时, 原式} = x+3 \\ &= \sqrt{3}+1+3 \cdots \text{④} \\ &= \sqrt{3}+4 \cdots \cdots \text{⑤} \end{aligned}$$

15. 已知 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 则 $x^2 + xy + y^2$ 的值为_____.

16. 计算:

$$(1) \sqrt{(-3)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - (3\sqrt{2})^0 - 4\cos 30^\circ + \frac{6}{\sqrt{3}};$$

$$(2) \sqrt{48} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{12} + \sqrt{24};$$

$$(3) \sqrt{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - (\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1);$$

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 6\sin 30^\circ - \left(\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)^0 + \sqrt{2} + |\sqrt{2}-\sqrt{3}|;$$

$$(5) (19 \cdot \text{天水}) (-2)^3 + \sqrt{16} - 2\sin 30^\circ + (2\ 019 - \pi)^0 + |\sqrt{3}-4|.$$

17. (18·毕节)观察下列运算方程:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \sqrt{2}-1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2};$$

.....

请运用上面的运算方法计算: $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2\ 015}+\sqrt{2\ 017}} +$

$$\frac{1}{\sqrt{2\ 017}+\sqrt{2\ 019}}.$$

单元测试(一)

一、选择题

1. 下列运算结果正确的是()

A. $\sqrt{8}-\sqrt{18}=-\sqrt{2}$

B. $(-0.1)^{-2}=0.01$

C. $\left(\frac{2a}{b}\right)^2 \div \frac{b}{2a} = \frac{2a}{b}$

D. $(-m)^3 \cdot m^2 = -m^6$

2. (19·烟台)某种计算机完成一次基本运算的时间约为1纳秒(ns),已知1纳秒=0.000 000 001秒,该计算机完成15次基本运算,所用时间用科学记数法表示为()

A. 1.5×10^{-9} 秒

B. 15×10^{-9} 秒

C. 1.5×10^{-8} 秒

D. 15×10^{-8} 秒

3. 关于 $\sqrt{8}$ 的叙述正确的是()A. 在数轴上不存在表示 $\sqrt{8}$ 的点

B. $\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

C. $\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

D. 与 $\sqrt{8}$ 最接近的整数是34. 若 $m-n=-1$,则 $(m-n)^2-2m+2n$ 的值是()

A. 3

B. 2

C. 1

D. -1

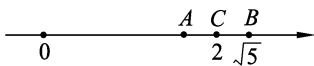
5. 下列计算正确的是()

A. $-3x^2y \cdot 5x^2y=2x^2y$

B. $-2x^2y^3 \cdot 2x^3y=-2x^5y^4$

C. $35x^3y^2 \div 5x^2y=7xy$

D. $(-2x-y)(2x+y)=4x^2-y^2$

6. 如图所示,数轴上表示 $2, \sqrt{5}$ 的对应点分别为 C, B, C 是 AB 的中点,则点 A 表示的数是()

A. $-\sqrt{5}$

B. $2-\sqrt{5}$

C. $4-\sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}-2$

7. 某商场2019年的销售利润为 a ,预计以后每年比上一年增长 $b\%$,那么2021年该商场的销售利润 y 等于()

A. $a(1+b)^2$

B. $a(1+b\%)^2$

C. $a+a \div (b\%)^2$

D. $a+ab^2$

8. 若 $a+b=3, a^2+b^2=7$,则 ab 等于()

A. 2

B. 1

C. -2

D. -1

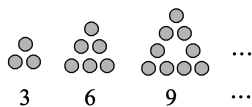
9. 小明用棋子摆放图形来研究数的规律.图1中棋子围成三角形,其颗数 $3, 6, 9, 12, \dots$ 称为三角形数,类似地,图2中的 $4, 8, 12, 16, \dots$ 称为正方形数.下列数中既是三角形数又是正方形数的是()

图1

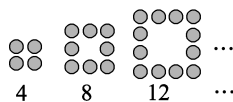


图2

A. 2 010

B. 2 013

C. 2 014

D. 2 016

10. 化简 $\left(\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} + \frac{2-x}{x+2}\right) \div \frac{x}{x-2}$,其结果是()

A. $-\frac{8}{x-2}$

B. $\frac{8}{x-2}$

C. $-\frac{8}{x+2}$

D. $\frac{8}{x+2}$

二、填空题

11. 实数 $\frac{22}{7}, \sqrt{7}, -8, \sqrt[3]{2}, \sqrt{36}, \frac{\pi}{3}$ 中的无理数是_____.

12. 分解因式: $x^3 - 9x =$ _____.

13. (19·内江)若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 则分式 $\frac{5m+5n-2mn}{-m-n}$ 的值为_____.

14. 已知当 $x=1$ 时, $2ax^2 + bx$ 的值为 3, 则当 $x=2$ 时, $ax^2 + bx$ 的值为_____.

15. 计算 $\sqrt{9} - 2^{-1} + \sqrt[3]{8} - |-2| =$ _____.

16. 若 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$, 对任意自然数 n 都成立, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

计算: $m = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} =$ _____.

三、解答题

17. (19·通辽)计算: $-1^4 - |\sqrt{3}-1| + (\sqrt{2}-1.414)^0 + 2\sin 60^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

18. (19·巴中)已知实数 x, y 满足 $\sqrt{x-3} + y^2 - 4y + 4 = 0$, 求代数式 $\frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot$

$\frac{1}{x^2 - 2xy + y^2} \div \frac{x}{x^2 y - xy^2}$ 的值.

19. (19·天水)先化简, 再求值: $\left(\frac{x}{x^2+x} - 1\right) \div \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, 其中 x 的值从不等式组

$\begin{cases} -x \leq 1, \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$ 的整数解中选取.

第二单元 方程与不等式

第五讲 一元一次方程与分式方程

★ 考试要求

1. 掌握等式的基本性质;掌握一元一次方程、分式方程的概念.
2. 会解一元一次方程和可化为一元一次方程的分式方程(方程中的分式不超过两个).
3. 理解分式方程产生增根的原因,并能解决实际问题.
4. 能利用一元一次方程和分式方程解决生活中的简单问题.

★ 知识梳理

1. 等式的性质:若 $a=b$, 则 $a \pm m = b \pm$ _____; 若 $a=b$, 则 $am = b$ _____, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ (m _____).

2. 解一元一次方程的一般步骤:(1) 去分母,(2) _____,(3) 移项,(4) _____,(5) 系数化为 1. 其中移项要_____.

注意:去分母时,(1) 没有分母的项不要漏乘(尤其整数项),也可以说方程中的每一项都要乘_____;(2) 应把分子作为一个整体加上括号.

3. 增根:使分式方程_____的根叫分式方程的增根,产生增根的原因是将分式方程化为整式方程时在方程两边同时乘了使分母_____的整式,因此解分式方程时要_____.

4. 解分式方程的一般步骤:分式方程 \rightarrow 整式方程 \rightarrow 解整式方程 \rightarrow _____.

验根方法:(1) 将所求得的根代入原方程进行检验;(2) 将所求的根代入_____进行检验,看其值是否为_____.

★ 典例分析

【例 1】 方程 $x+5 = \frac{1}{2}(x+3)$ 的解是_____.

方法总结: 本题考查了方程的解及一元一次方程的解法,利用方程的解法与步骤求解即可.

【例 2】 (19·徐州)解方程: $\frac{x-2}{x-3} + 1 = \frac{2}{3-x}$.

点拨: 分式方程去分母转化为整式方程,求出整式方程的解得到 x 的值,经检验即可得到分式方程的根.

尝试解答

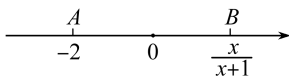
8. (18·嘉兴)甲、乙两个机器人检测零件,甲比乙每小时多检测 20 个,甲检测 300 个比乙检测 200 个所用的时间少 10%. 若设甲每小时检测 x 个,则根据题意,可列方程:

9. 解方程:

$$(1) 2 - \frac{2x+1}{3} = \frac{1+x}{2};$$

$$(2) \frac{2x}{x+3} + 1 = \frac{7}{2x+6}.$$

10. (19·乐山)如图,点 A, B 在数轴上,它们对应的数分别为 $-2, \frac{x}{x+1}$,且点 A, B 到原点的距离相等,求 x 的值.



11. (18·威海)某自动化车间计划生产 480 个零件,当生产任务完成一半时,停止生产进行自动化程序软件升级,用时 20 分钟,恢复生产后工作效率比原来提高了 $\frac{1}{3}$,结果完成任务时比原计划提前了 40 分钟,软件升级后每小时生产多少个零件?

12. (19·威海)小明和小刚约定周末到某体育公园打羽毛球.他们两家到体育公园的距离分别是 1 200 米、3 000 米,小刚骑自行车的速度是小明步行速度的 3 倍.若二人同时到达,则小明需提前 4 分钟出发,求小明和小刚两人的速度.

第六讲 二元一次方程组



考试要求

1. 正确理解二元一次方程(组)的概念.
2. 掌握代入消元法、加减消元法解二元一次方程组;能解简单的三元一次方程组.
3. 会列二元一次方程组解决实际问题,并能根据具体问题的实际意义检验结果的合理性.



知识梳理

1. 二元一次方程的定义:含有_____未知数,并且未知数的项的次数都是_____的方程叫做二元一次方程.

2. 二元一次方程组的定义:共含有_____个未知数的_____一次方程组成的一组方程,叫做二元一次方程组.

3. 二元一次方程(组)的解:一般地,使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值,叫做二元一次方程的解,二元一次方程有_____个解.一般地,二元一次方程组的两个方程的_____解,叫做二元一次方程组的解.

4. 消元法解二元一次方程组:

消元法的基本方法:将二元一次方程组转化为_____方程.方法有_____消元法和_____消元法两种.

5. 列二元一次方程组解应用题的一般步骤:

审:通过审题,把实际问题抽象成数学问题,分析已知数和未知数,并用字母表示其中的两个未知数.

找:找出能够表示题意的两个相等关系.

列:根据这两个相等关系列出必需的代数式,从而列出方程组.

解:解这个方程组,求出两个未知数的值.

答:在对求出的方程的解作出是否合理判断的基础上,写出答案.



典例分析

【例 1】(19·天津)方程组 $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 6x-2y=11 \end{cases}$ 的解是()

A. $\begin{cases} x=-1, \\ y=5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3, \\ y=-1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=2, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

点拨:两方程相加,消去 y ,先求出 x 的值,再将 x 的值代入任一方程,即可求解.

尝试解答

方法总结:当方程组中某一个未知数的系数是1或-1时,选择代入消元法较为简单;当方程组中同一个未知数的系数相同或互为相反数时,采用加减消元法较为简单;当系数不同也不互为相反数时,可通过找系数最小公倍数变成同一个未知数的系数相同或互为相反数的方程组,再采用加减消元法较为合适.

【例 2】 (19·菏泽)已知 $\begin{cases} x=3, \\ y=-2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=2, \\ bx+ay=-3 \end{cases}$ 的解,则 $a+b$ 的值是()

A. -1 B. 1 C. -5 D. 5

点拨:此题考查了二元一次方程的解的概念及解二元一次方程组,方程的解即能使方程左右两边相等的未知数的值.将 x 与 y 的值代入方程组,再解关于 a, b 的二元一次方程组,即可求出 a 与 b 的值.

【例 3】 去年“五一”小长假期间,某市外来与外出旅游的总人数为 226 万,分别比前年同期增长 30% 和 20%,前年同期外来旅游比外出旅游的人数多 20 万.求该市去年外来和外出旅游的人数.

点拨:设该市前年外来旅游人数为 x 万,外出旅游的人数为 y 万,根据总人数为 226 万,前年同期外来旅游比外出旅游的人数多 20 万,列方程组求解.

尝试解答

方法总结:本题考查了二元一次方程组的应用,解答本题的关键是读懂题意,设出未知数,找出合适的等量关系,列方程组求解.



强化训练

1. (18·广州)《九章算术》是我国古代数学的经典著作,书中有一个问题:“今有黄金九枚,白银一十一枚,称之重适等,交易其一,金轻十三两,问金、银一枚各重几何?”意思是:甲袋中装有黄金 9 枚(每枚黄金质量相同),乙袋中装有白银 11 枚(每枚白银质量相同),称重两袋相等,两袋互相交换 1 枚后,甲袋比乙袋轻了 13 两(袋子质量忽略不计),问黄金、白银每枚各重多少两?设每枚黄金重 x 两,每枚白银重 y 两,根据题意得()

A. $\begin{cases} 11x=9y, \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 10y+x=8x+y, \\ 9x+13=11y \end{cases}$

C. $\begin{cases} 9x=11y, \\ (8x+y)-(10y+x)=13 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 9x=11y, \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}$

2. (18·齐齐哈尔)某抗战纪念馆馆长找到大学生团干部小张,联系青年志愿者在周日参与活动,活动累计 56 个小时的工作时间,需要每名男生工作 5 个小时,每名女生工作 4 个小时,小张可以安排学生参加活动的方案共有()

A. 1 种

B. 2 种

C. 3 种

D. 4 种

3. 滴滴快车是一种便捷的出行工具, 计价规则如下表:

计费项目	里程费	时长费	远途费
单价	1.8 元/千米	0.3 元/分钟	0.8 元/千米

注: 车费由里程费、时长费、远途费三部分构成, 其中里程费按行车的实际里程计算; 时长费按行车的实际时间计算; 远途费的收取方式为: 行车里程 7 千米以内(含 7 千米)不收远途费, 超过 7 千米的, 超出部分每千米收 0.8 元.

小王与小张各自乘坐滴滴快车, 行车里程分别为 6 千米与 8.5 千米. 如果下车时两人所付车费相同, 那么这两辆滴滴快车的行车时间相差()

- A. 10 分钟 B. 13 分钟 C. 15 分钟 D. 19 分钟

4. 若方程组 $\begin{cases} 2x+y=1-3k, \\ x+2y=2 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=0$, 则 k 的值为()

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 不能确定

5. (18·宁波) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} x-2y=5, \\ x+2y=-3, \end{cases}$ 则 x^2-4y^2 的值为_____.

6. 若单项式 $-5x^4y^{2m+n}$ 与 $17x^{m-n}y^2$ 是同类项, 则 $m-7n$ 的算术平方根是_____.

7. (18·滨州) 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-my=5, \\ 2x+ny=6 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 则关于 a, b

的二元一次方程组 $\begin{cases} 3(a+b)-m(a-b)=5, \\ 2(a+b)+n(a-b)=6 \end{cases}$ 的解是_____.

8. 解方程组 $\begin{cases} x+3y=2, \\ y+3z=4, \\ z+3x=6, \end{cases}$ 得 $x+y+z=$ _____.

9. 解方程组:

$$(1) \begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{5} = 1, \\ 3(x-y) + 2(x+y) = 6; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y+z=23, \\ x-y=1, \\ 2x+y-z=20. \end{cases}$$

10. 甲、乙两人共同解方程组 $\begin{cases} ax+5y=15, & \textcircled{1} \\ 4x-by=-2, & \textcircled{2} \end{cases}$ 由于甲看错了方程①中的 a , 得到方程组

的解为 $\begin{cases} x=-3, \\ y=-1; \end{cases}$ 乙看错了方程②中的 b , 得到方程组的解为 $\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$ 试计算 $a^{2020} +$

$\left(-\frac{1}{10}b\right)^{2021}$ 的值.

11. (19·烟台) 亚洲文明对话大会召开期间, 大批的大学生志愿者参与服务工作. 某大学计划组织本校全体志愿者统一乘车去会场, 若单独调配 36 座新能源客车若干辆, 则有 2 人没有座位; 若只调配 22 座新能源客车, 则用车数量将增加 4 辆, 并空出 2 个座位.

(1) 计划调配 36 座新能源客车多少辆? 该大学共有多少名志愿者?

(2) 若同时调配 36 座和 22 座两种车型, 既保证每人有座, 又保证每车不空座, 则两种车型各需多少辆?

第七讲 一元二次方程



考试要求

1. 掌握一元二次方程的概念, 能用直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法解数字系数的一元二次方程.
2. 会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实数根和两个根是否相等.
3. 了解一元二次方程根与系数的关系.
4. 能用一元二次方程解决相关的实际问题; 并能根据具体问题的实际意义, 检验方程的解是否合理.



知识梳理

1. 一元二次方程的概念:

化简后: 未知数的个数为 _____, 未知数的最高次数为 _____ 的整式方程. 一般形式是 _____, 其中 _____.

2. 一元二次方程的解法:

(1) _____: 对于形如 $x^2 = n$ 或 $(ax+b)^2 = n (a \neq 0)$ 的一元二次方程, 即一元二次方程的一边是含有未知数的一次式的平方, 而另一边是一个非负数, 可用开平方法求解.

(2) _____: 通过配方的方法把一元二次方程转化为 $(x+m)^2 = n (n \geq 0)$ 的方程, 再运用开平方法求解.

(3) _____: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 其根为 _____.

(4) _____: 依据: 如果两个因式的积等于 0, 那么这两个因式至少有一个为 0, 即: 若 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$.

3. 根的判别式、根与系数的关系.

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,

当 _____ 时, 方程有两个实数根, 且这两个实数根不相等.

当 _____ 时, 方程有两个实数根, 且这两个实数根相等, 写为 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

当 _____ 时, 方程无实数根.

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根 x_1 和 x_2 , 则有 $x_1 x_2 =$ _____, $x_1 + x_2 =$ _____.



典例分析

【例 1】下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是()

A. $3(x+1)^2 = 2(x+1)$

B. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

C. $ax^2 + bx + c = 0$

D. $x^2 + 2x = x^2 + 1$

方法总结: 化简后, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2, 这样的整式方程就是一元二次方程. 正确理解“未知数的最高次数是 2”: (1) 该项系数不为“0”; (2) 未知数指数为“2”; (3) 若存在某项指数为待定系数, 或系数也待定, 则需建立方程或不等式加以讨论.

【例 2】(19·绥化) 已知关于 x 的方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若该方程有两个实数根, 分别为 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 4$ 时, 求 k 的值.

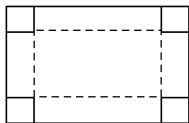
点拨: (1) 方程有实根分类讨论: 当 $k=0$ 时, 方程为一元一次方程; 当 $k \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程, 此时满足 $\Delta \geq 0$. (2) 根据根与系数的关系求解.

尝试解答

方法总结: 本题考查了分类讨论方程有实数根的情况、根的判别式及一元二次方程根与系数的关系.

【例 3】 (19·徐州)如图,有一块矩形硬纸板,长 30 cm,宽 20 cm.在其四角各剪去一个同样的正方形,然后将四周突出部分折起,可制成一个无盖长方体盒子.当剪去正方形的边长取何值时,所得长方体盒子的侧面积为 200 cm^2 ?

点拨:设剪去正方形的边长为 $x \text{ cm}$,则做成无盖长方体盒子的底面长为 $(30-2x) \text{ cm}$,宽为 $(20-2x) \text{ cm}$,高为 $x \text{ cm}$.根据长方体的侧面积计算公式列出方程求解即可.



尝试解答

方法总结:本题考查了一元二次方程的应用.解题的关键是要读懂题目的意思,根据题目给出的条件,找出合适的等量关系,列出方程,再求解.



强化训练

1. (18·临沂)一元二次方程 $y^2 - y - \frac{3}{4} = 0$ 配方后可化为()

A. $(y + \frac{1}{2})^2 = 1$

B. $(y - \frac{1}{2})^2 = 1$

C. $(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

D. $(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

2. (19·遂宁)已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2x + a^2 - 1 = 0$ 有一个根为 $x = 0$,则 a 的值为()

A. 0

B. ± 1

C. 1

D. -1

3. 如果 $x^2 - x - 1 = (x+1)^0$,那么 x 的值为()

A. 2 或 -1

B. 0 或 1

C. 2

D. -1

4. 根据下列表格对应值:

x	3.24	3.25	3.26
$ax^2 + bx + c$	-0.02	0.01	0.03

判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个解的范围是()

A. $x < 3.24$

B. $3.24 < x < 3.25$

C. $3.25 < x < 3.26$

D. $3.25 < x < 3.28$

5. (18·安顺)一个等腰三角形的两条边长分别是方程 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 的两根,则该等腰三角形的周长是()

A. 12

B. 9

C. 13

D. 12 或 9

6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a^2 - 2a)x + a - 1 = 0$ 的两个实数根互为相反数, 则 a 的值为()

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 2 或 0

7. (18·扬州) 关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

8. (18·泸州) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $\frac{1}{2x_1 + 1} + \frac{1}{2x_2 + 1}$ 的值是_____.

9. (18·达州) 已知 $m^2 - 2m - 1 = 0, n^2 + 2n - 1 = 0$ 且 $mn \neq 1$, 则 $\frac{mn + n + 1}{n}$ 的值为_____.

10. 选择适当方法解下列方程:

(1) $x^2 - 5x + 1 = 0$;

(2) $3(x - 2)^2 = x(x - 2)$;

(3) $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 5 = 0$;

(4) $(y + 2)^2 = (3y - 1)^2$.

11. (18·随州) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k + 3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$, 求 k 的值.

12. (19·贺州)2016年,某贫困户的家庭年人均纯收入为2 500元,通过政府产业扶持,发展了养殖业后,到2018年,家庭年人均纯收入达到了3 600元.

- (1) 求该贫困户2016年到2018年家庭年人均纯收入的年平均增长率;
- (2) 若年平均增长率保持不变,2019年该贫困户的家庭年人均纯收入是否能达到4 200元?

13. (18·遵义)在水果销售旺季,某水果店购进一优质水果,进价为20元/千克,售价不低于20元/千克,且不超过32元/千克.根据销售情况,发现该水果一天的销售量 y (千克)与该天的售价 x (元/千克)满足如下表所示的一次函数关系.

销售量 y (千克)	...	34.8	32	29.6	28	...
售价 x (元/千克)	...	22.6	24	25.2	26	...

- (1) 某天这种水果的售价为23.5元/千克,求当天该水果的销售量;
- (2) 如果某天销售这种水果获利150元,那么当天该水果的售价为多少?

14. (18·安顺)某地2017年为做好“精准扶贫”,投入资金1 280万元用于异地安置,并规划投入资金逐年增加,2019年在2017年的基础上增加投入资金1 600万元.

- (1) 从2017年到2019年,该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少?
- (2) 在2019年异地安置的具体实施中,该地计划投入资金不低于500万元用于优先搬迁租房奖励,规定前1 000户(含第1 000户)每户每天奖励8元,1 000户以后每户每天奖励5元.按租房400天计算,求2019年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励.

第八讲 一元一次不等式(组)



考试要求

1. 结合具体问题,了解不等式的意义,探索并掌握不等式的基本性质.
2. 理解不等式(组)的解及解集的含义;会解数字系数的一元一次不等式,并能在数轴上表示出解集;会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集;体会数形结合的思想.
3. 能根据具体问题的数量关系列出一元一次不等式(组)解决简单的实际问题,并能根据具体问题的实际意义检验结果的合理性.



知识梳理

1. 不等式的基本性质

(1) 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变.

如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c, a - c > b - c$.

(2) 不等式的两边都乘(或除以)同一个正数,不等号的方向不变.

如果 $a > b$, 并且 $c > 0$, 那么 $ac > bc$ (或 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$).

(3) 不等式的两边都乘(或除以)同一个负数,不等号的方向改变.

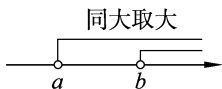
如果 $a > b$, 并且 $c < 0$, 那么 $ac < bc$ (或 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$).

2. 一元一次不等式

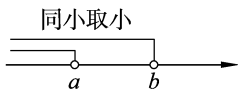
左右两边都是整式,只含有一个未知数,且未知数的次数是1,系数不等于0的不等式叫做一元一次不等式.

3. 不等式组解集的确定方法,可以归纳为以下四种类型($a < b$):

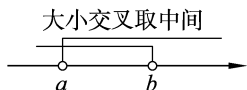
(1) $\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$ 的解集是 _____, 如下图:



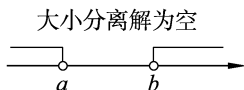
(2) $\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$ 的解集是 _____, 如下图:



(3) $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$ 的解集是 _____, 如下图:



(4) $\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$ 的解集是 _____, 如下图:



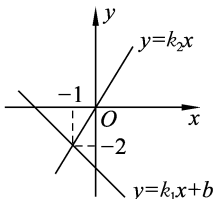
4. 一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的联系:

作出函数 $y = k_1x + b$ 和 $y = k_2x$ 的图象(如右图),观察图象回答:

(1) $k_1x + b > k_2x$ 的解集是 _____.

(2) $k_1x + b < k_2x$ 的解集是 _____.

(3) $k_1x + b = k_2x$ 的解是 _____.





典例分析

【例 1】 (19·桂林) 如果 $a > b, c < 0$, 那么下列不等式成立的是()

A. $a + c > b$

B. $a + c > b - c$

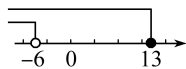
C. $ac - 1 > bc - 1$

D. $a(c - 1) < b(c - 1)$

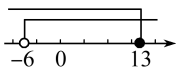
点拨: 根据不等式的基本性质进行判别.

方法总结: 在应用不等式的性质时, 要注意何时“变号”、何时“不变号”. 同时, 注意“特殊值法”的应用, 往往会起到事半功倍的效果.

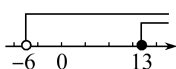
【例 2】 (19·乐山) 不等式组 $\begin{cases} 2x - 6 < 3x, \\ \frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{4} \geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()



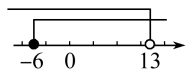
A.



B.



C.



D.

点拨: 先求出不等式组中每一个不等式的解集, 再求出它们的公共部分就是不等式组的解集.

方法总结: 本题考查的是一元一次不等式组的解集, 解此类题目常常要结合数轴来判断.

【例 3】 (19·聊城) 若不等式组 $\begin{cases} \frac{x+1}{3} < \frac{x}{2} - 1, \\ x < 4m \end{cases}$ 无解, 则 m 的取值范围为()

A. $m \leq 2$

B. $m < 2$

C. $m \geq 2$

D. $m > 2$

方法总结: 本题考查解一元一次不等式组, 会根据未知数的范围确定它所满足的特殊条件的值. 一般方法是先解不等式组, 再根据解集求出特殊值.

【例 4】 某汽车销售公司经销某品牌 A 款汽车, 随着汽车的普及, 其价格也在不断下降. 今年 5 月份 A 款汽车的售价比去年同期每辆降价 1 万元, 如果卖出相同数量的 A 款汽车, 去年销售额为 100 万元, 今年销售额只有 90 万元.

(1) 今年 5 月份 A 款汽车每辆售价多少万元?

(2) 为了增加收入, 汽车销售公司决定再经销同品牌的 B 款汽车, 已知 A 款汽车每辆进价为 7.5 万元, B 款汽车每辆进价为 6 万元. 公司预计用不多于 105 万元且不少于 99 万元的资金购进这两款汽车共 15 辆, 有几种进货方案?

(3) 如果 B 款汽车每辆售价为 8 万元, 为打开 B 款汽车的销路, 公司决定每售出一辆 B 款汽车, 返还顾客现金 a 万元, 要使(2)中所有的方案获利相同, a 的值应是多少? 此时, 哪种方案对公司更有利?

点拨: (1) 求单价, 总价明确, 应根据数量来列等量关系. 等量关系为: 今年的销售数量 = 去年的销售数量. (2) 关系式为: $99 \text{ 万元} \leq \text{A 款汽车总价} + \text{B 款汽车总价} \leq 105 \text{ 万元}$. (3) 方案获利相同, 说明与所设的未知数无关, 让未知数 x 的系数为 0 即可. 判断哪种方案对公司更有利, 因为 A 款汽车每辆进价为 7.5 万元, B 款汽车每辆进价为 6 万元, 所以要多进 B 款汽车.

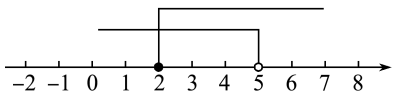
尝试解答

方法总结: 本题考查分式方程和一元一次不等式组的综合应用, 找到合适的等量关系及不等关系是解决问题的关键.

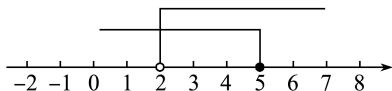


强化训练

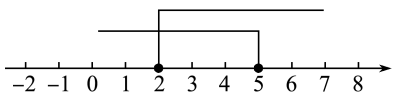
1. (18·聊城) 已知不等式 $\frac{2-x}{2} \leq \frac{2x-4}{3} < \frac{x-1}{2}$, 其解集在数轴上表示正确的是()



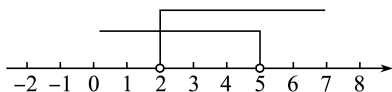
A.



B.



C.



D.

2. (18·贵港) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x < 3a+2, \\ x > a-4 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是()

- A. $a \leq -3$ B. $a < -3$ C. $a > 3$ D. $a \geq 3$

3. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} 6-3(x+1) < x-9, \\ x-m > -1 \end{cases}$ 的解集是 $x > 3$, 则 m 的取值范围是()

- A. $m > 4$ B. $m \geq 4$
C. $m < 4$ D. $m \leq 4$

4. (19·绵阳) 红星商店计划用不超过 4 200 元的资金, 购进甲、乙两种单价分别为 60 元、100 元的商品共 50 件. 据市场行情, 销售甲、乙商品各一件分别可获利 10 元、20 元, 两种商品均售完. 若所获利润大于 750 元, 则该店进货方案有()

- A. 3 种 B. 4 种 C. 5 种 D. 6 种

5. (18·荆门) 已知关于 x 的不等式 $3x-m+1 > 0$ 的最小整数解为 2, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $4 \leq m < 7$ B. $4 < m < 7$ C. $4 \leq m \leq 7$ D. $4 < m \leq 7$

6. 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y > 0$, 则 m 的取值范围是_____.

7. 不等式 $(m-2)x > 2-m$ 的解集为 $x < -1$, 则 m 的取值范围是_____.

8. (18·北京)某公园划船项目收费标准如下:

船型	两人船 (限乘两人)	四人船 (限乘四人)	六人船 (限乘六人)	八人船 (限乘八人)
每船租金 (元/小时)	90	100	130	150

某班 18 名同学一起去该公园划船,若每人划船的时间均为 1 小时,则租船的总费用最低为_____元.

9. (19·宜宾)若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-2}{4} < \frac{x-1}{3}, \\ 2x-m \leq 2-x \end{cases}$, 有且只有两个整数解,则 m 的取值

范围是_____.

10. (19·遂宁)解不等式组 $\begin{cases} 3x < 5x+6, \\ \frac{x+1}{6} \geq \frac{x-1}{2}, \end{cases}$ 把它的解集在数轴上表示出来,并写出其整

数解.

11. (19·潍坊)已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ x-2y=k \end{cases}$ 的解满足 $x > y$, 求 k 的

取值范围.

12. (19·资阳)为了参加西部博览会,资阳市计划印制一批宣传册.该宣传册每本共 10 页,由 A, B 两种彩页构成.已知 A 种彩页制版费为 300 元/张, B 种彩页制版费为 200 元/张, 共计 2 400 元.(注:彩页制版费与印数无关)

(1) 每本宣传册 A, B 两种彩页各有多少张?

(2) 据了解, A 种彩页印刷费为 2.5 元/张, B 种彩页印刷费为 1.5 元/张, 这批宣传册的

制版费与印刷费的和不超过 30 900 元. 如果按到资阳展台处的参观者人手一册发放宣传册, 预计最多能发给多少位参观者?

13. (19·郴州) 某小微企业为加快产业转型升级步伐, 引进一批 A, B 两种型号的机器. 已知一台 A 型机器比一台 B 型机器每小时多加工 2 个零件, 且一台 A 型机器加工 80 个零件与一台 B 型机器加工 60 个零件所用时间相等.

(1) 每台 A, B 两种型号的机器每小时分别加工多少个零件?

(2) 如果该企业计划安排 A, B 两种型号的机器共 10 台一起加工一批该零件, 为了如期完成任务, 要求两种机器每小时加工的零件不少于 72 件, 同时为了保障机器的正常运转, 两种机器每小时加工的零件不能超过 76 件, 那么 A, B 两种型号的机器可以各安排多少台?

14. (18·济宁) 绿水青山就是金山银山, 为保护生态环境, A, B 两村准备各自清理所属区域养鱼网箱和捕鱼网箱, 每村参加清理人数及总开支如下表:

村庄	清理养鱼网箱人数	清理捕鱼网箱人数	总支出/元
A	15	9	57 000
B	10	16	68 000

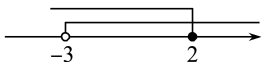
(1) 若两村清理同类渔具的人均支出费用一样, 求清理养鱼网箱和捕鱼网箱的人均支出费用各是多少元;

(2) 在人均支出费用不变的情况下, 为节约开支, 两村准备抽调 40 人共同清理养鱼网箱和捕鱼网箱, 要使总支出不超过 102 000 元, 且清理养鱼网箱人数小于清理捕鱼网箱人数, 则有哪几种分配清理人员方案?

单元测试(二)

一、选择题

1. 关于 x 的一元一次方程 $x^{k-1}+m=5$ 的解为 $x=2$, 则 $k+m$ 的值为()
 A. 9 B. 8 C. 5 D. 4
2. (18·广安) 已知点 $P(1-a, 2a+6)$ 在第四象限, 则 a 的取值范围是()
 A. $a < -3$ B. $-3 < a < 1$ C. $a > -3$ D. $a > 1$
3. (18·安徽) 若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根, 则实数 a 的值为()
 A. -1 B. 1 C. -2 或 2 D. -3 或 1
4. 关于 x 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 -2 和 1 , 则 n^m 的值为()
 A. -8 B. 8 C. 16 D. -16
5. (18·海南) 下列四个不等式组中, 解集在数轴上表示如图所示的是()



- A. $\begin{cases} x \geq 2, \\ x > -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \leq 2, \\ x < -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > -3 \end{cases}$
6. (19·包头) 已知等腰三角形的三边长分别为 $a, b, 4$, 且 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根, 则 m 的值是()
 A. 34 B. 30 C. 30 或 34 D. 30 和 36
7. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{3x-a}{x-3}=\frac{1}{3}$ 的解是非负数, 那么 a 的取值范围是()
 A. $a > 1$ B. $a \geq 1$ C. $a \geq 1$ 且 $a \neq 9$ D. $a \leq 1$
8. (19·淄博) 解分式方程 $\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$ 时, 去分母变形正确的是()
 A. $-1+x=-1-2(x-2)$ B. $1-x=1-2(x-2)$
 C. $-1+x=1+2(2-x)$ D. $1-x=-1-2(x-2)$
9. 甲、乙两人匀速在 400 米环形跑道上跑步, 同时同地出发, 如果相向而行, 每隔 1 分钟相遇一次; 如果同向而行, 每隔 5 分钟相遇一次, 已知甲比乙的速度快. 设甲每分钟跑 x 米, 乙每分钟跑 y 米, 根据题意, 列出方程组正确的是()

- A. $\begin{cases} 60x+60y=400, \\ 300x-300y=400 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=400, \\ 5x-5y=400 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} 60x+60y=400, \\ 300y-300x=400 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=400, \\ 5y-5x=400 \end{cases}$

二、填空题

10. (19·黄石) 分式方程 $\frac{4}{x^2-4x}-\frac{1}{x-4}=1$ 的解为_____.
11. (19·济宁) 已知 $x=1$ 是方程 $x^2+bx-2=0$ 的一个根, 则方程的另一个根是_____.

12. 已知 $\begin{cases} x=a, \\ y=b \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 的解, 则 $3a-b=$ _____.

13. 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$, 则 m 的取值范围是 _____.

14. 若关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$ 有增根, 则实数 m 的值是 _____.

15. 一列数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 其中 $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{1-x_{n-1}}$ (n 为不小于 2 的整数), 则 $x_{2019} =$ _____.

三、解答题

16. 解方程:

(1) $x^2 + 4x - 1 = 0$;

(2) $\frac{2x+1}{x-3} = 1 + \frac{2}{3-x}$.

17. (19·江西) 解不等式组: $\begin{cases} 2(x+1) > x, \\ 1-2x \geq \frac{x+7}{2}, \end{cases}$ 并在数轴上表示它的解集.

18. 为了进一步落实“节能减排”措施, 冬季供暖来临前, 某单位决定对 7 200 平方米的“外墙保温”工程进行招标. 现有甲、乙两个工程队参与投标, 比较这两个工程队的标书发现: 乙队每天完成的工程量是甲队的 1.5 倍, 这样乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务. 问甲队每天完成多少平方米?

19. (19·滨州)有甲、乙两种客车,2辆甲种客车与3辆乙种客车的总载客量为180人,1辆甲种客车与2辆乙种客车的总载客量为105人.

(1) 请问1辆甲种客车与1辆乙种客车的载客量分别为多少人?

(2) 某学校组织240名师生集体外出活动,拟租用甲、乙两种客车共6辆,一次将全部师生送到指定地点.若每辆甲种客车的租金为400元,每辆乙种客车的租金为280元,请给出最节省费用的租车方案,并求出最低费用.

20. 某小区为了绿化环境,计划分两次购进A,B两种花草,第一次分别购进A,B两种花草30棵和15棵,共花费675元;第二次分别购进A,B两种花草12棵和5棵.两次共花费940元(两次购进的A,B两种花草价格均分别相同).

(1) A,B两种花草每棵的价格分别是多少元?

(2) 若购买A,B两种花草共31棵,且B种花草的数量少于A种花草的数量的2倍,请你给出一种费用最省的方案,并求出该方案所需费用.